La dichotomie

Partie A

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$x \to x^3 + 2x^2 - 4$.

1) Tracer la fonction à la calculatrice et conjecturer son sens de variation et le nombre de solutions de l'équation

a) $f(x) = 0$.

b) $f(x) = 5$

2) Soient a et b deux nombres réels. A quelle condition sur $f(a)$ et $f(b)$ peut-on affirmer que $f(x) = 0$ admet une solution sur l'intervalle $[a ; b]$?

Partie B Un algorithme de dichotomie

On se propose, grâce à un algorithme, de donner une valeur approchée aussi précise que possible de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

On considère l'algorithme suivant, avec a, b et m des nombres réels, f une fonction et k, N des entiers naturels

```
Saisir a, b, N
Pour k variant de 1 à N
    m ← (a + b)/2
    Si f(m) et f(a) sont de même signe alors
        a ← m
    sinon
        b ← m
    FinSi
Fin pour
Afficher a, b
```

1) On applique à la main cet algorithme à la fonction f donnée dans le texte.

Prendre $N = 4$ et compléter le tableau suivant :

k		1	2	3	4
m					
a	0				
b	1				

Quel est le rôle de cet algorithme ? Expliquer en particulier la fonction de la variable N.

Quelle précision sur la solution recherchée permet cet algorithme ?

2) Le problème de cet algorithme est que l'on ne sait pas à priori quelle sera la précision du résultat. Vous peut l'améliorer en remplaçant la boucle "Pour..." par une boucle "Tant que...".

3) Programmer cet algorithme sur Python. Vous prendrez soin au préalable de définir la fonction f :

```
def f(x):
    y=x**3+2*x**2-4
    return(y)
```

Tester ce programme pour $N = 4$, puis 10, 15 et 25.
Que constatez-vous ?

4) Comment modifier l'algorithme précédent pour trouver un encadrement de la solution de l'équation $f(x) = 5$?
Appliquer les modifications nécessaires puis tester le programme pour $N = 4$, puis 10, 15 et 25.

Partie C Encadrement par balayage
Cette dernière méthode est basée sur une utilisation astucieuse des tableaux de valeurs de la calculatrice pour donner une valeur approchée de la solution de $f(x) = 0$.

1) À l'aide de Python, donner un tableau de valeurs de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 1] avec un pas de 0,1.
En déduire un encadrement à 10^{-1} près de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

2) Avec cet encadrement, donner un nouveau tableau de valeurs de la fonction f avec un pas de 0,01.
En déduire, toujours grâce à Python, un encadrement à 10^{-2} près de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

3) En réitérant ce procédé, trouver un encadrement à 10^{-5} près de la solution de l'équation $f(x) = 0$.
Comparer avec celui obtenu au dans la partie B.

4) Adapter cette nouvelle méthode pour déterminer un encadrement à 10^{-5} près de la solution de l'équation $f(x) = 5$.