MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

RÉGION ACADÉMIQUE NORMANDIE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Classes de premières (toutes séries sauf S)

Académies de Caen et de Rouen

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures au maximum chacune. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Sauf en cas de force majeure aucun candidat n'est autorisé à quitter la salle de composition moins de deux heures après le début.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Première partie de l'épreuve

Exercice national numéro 1

Sommes de carrés en abyme

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des entiers naturels non nuls, qui à tout entier naturel non nul associe la somme des carrés des chiffres de son écriture décimale.
Ainsi, par exemple, $f(5) = 5^2 = 25, f(29) = 2^2 + 9^2 = 85, f(132) = 1^2 + 3^2 + 2^2 = 14$.

Introduction

1. ***a.*** Calculer $f(1)$, $f(11)$ et $f(111)$. Démontrer que tout entier naturel non nul admet au moins un antécédent par f.
b. Calculer $f(23), f(32)$ et $f(320)$.
c. Démontrer que tout entier naturel non nul admet une infinité d'antécédents par f.

La suite des images successives d'un entier

Étant donné un entier naturel non nul u_0, on considère la suite de nombres définie par u_0 et par ses images successives par f notées $u_1 = f(u_0), u_2 = f(u_1), \ldots, u_{n+1} = f(u_n)$, etc.
2. Calculer les cinq premiers nombres de cette liste pour $u_0 = 301$, puis pour $u_0 = 23$ et pour $u_0 = 1030$.
Que peut-on en déduire pour les termes suivants de chacune de ces trois listes ?
3. Calculer les nombres $u_0, u_1, u_2, \ldots u_8$ pour $u_0 = 4$.
Quels sont les nombres suivants de la liste dans ce cas ?

Étude d'une propriété

On souhaite démontrer la propriété suivante, notée $\mathcal{P}$ dans la suite du problème :
Si u_0 est un entier non nul :
- soit, il existe un rang N tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à N, $u_n = 1$.
- soit, il existe un rang M tel que $u_M = 4$, et les termes suivants sont alors 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4,…
On dit dans ce cas que la suite est périodique, de période 8, à partir du rang M.

On dispose de l'algorithme ci-contre.

```
Variable : u entier naturel non nul

Entrer u
   Tant que (u ≠ 1 et u ≠ 4)
   u ← f(u)
   Afficher u
Fin tant que
Afficher « propriété vérifiée »
```

4. ***a.*** Qu'affiche cet algorithme lorsque l'on saisit en entrée la valeur $u = 42$?
b. Justifier que si l'algorithme affiche « propriété vérifiée» pour une valeur u donnée alors u vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
c. Comment le programme se comporterait-il si un nombre u ne vérifiait pas la propriété $\mathcal{P}$?
d. Tous les entiers naturels compris entre 1 et 99 vérifient la propriété $\mathcal{P}$. Expliquer comment cet algorithme peut permettre de le prouver.

Extension aux écritures à trois chiffres

On souhaite montrer que la propriété $\mathcal{P}$ s'étend aux entiers naturels non nul u_0 s'écrivant avec trois chiffres.
5. Soient a, b et c des entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 tels que $a \neq 0$ et soit $x = 100a + 10b + c$.
a. Montrer que $x - f(x) \geq 99 + c - c^2 > 0$ et en déduire que $f(x) \leq x - 1$.
b. Si u_0 s'écrit avec trois chiffres, montrer qu'il existe un rang J tel que $u_J \leq 99$. Conclure.

Généralisation

On souhaite montrer que la propriété est vraie pour tout entier naturel non nul u_0.
6. ***a.*** Montrer que, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 4, on a : $81p < 10^{p-1}$.
b. En déduire que, si un terme u_n de la suite s'écrit avec p chiffres $(p \geq 4)$, alors $u_{n+1} = f(u_n)$ s'écrit avec au plus $p - 1$ chiffres.
c. Montrer que pour tout entier u_0 il existe un rang K tel que $u_K \leq 999$. Conclure.

Exercice national numéro 2

Boîtes de canelés bordelais (spécialités pâtissières)

C'est du gâteau

Une pâtisserie propose des boîtes de canelés bordelais de diverses contenances : des conditionnements par 6, par 9, par 12 et par 16 sont possibles.

1. Peut-on acheter 10 canelés, 20 canelés, 30 canelés ?

2. *a.* Établir la liste des quantités, inférieures à 30, qu'on ne peut pas réaliser en achetant plusieurs boîtes.

b. Montrer que, s'il existe un entier n tel que tout achat de $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ canelés soit possible, alors il est possible d'acheter toute quantité de canelés supérieure ou égale à n.

c. Déterminer le plus petit entier n réalisant la condition précédente.

3. *a.* Pourrait-on commander 50 canelés si les conditionnements possibles étaient 6, 9, 12 et 15 ?

b. Y aurait-il dans ce cas un seuil au-delà duquel toute quantité soit réalisable ?

Un algorithme glouton mais peu performant

Pour conditionner une commande de n canelés, on peut appliquer un algorithme (qualifié de *glouton*) consistant à utiliser un maximum de boîtes de la plus grande taille, puis de placer ce qui reste dans des boîtes de taille immédiatement inférieure, etc.

4. *a.* Que donne cette méthode s'il s'agit de répartir 60 canelés dans des boîtes de 16, 12, 9 et 6 ?

b. Et pour répartir 75 canelés ?

c. Pourrait-on conditionner les 75 canelés en procédant autrement ?

5. On s'autorise à présent des emballages individuels, mais on souhaite limiter le nombre de boîtes utilisées.

a. Combien de boîtes de 12, 8, 6 et 1 faudrait-il utiliser pour conditionner 41 canelés en utilisant l'algorithme glouton ?

b. Le même total est-il réalisable avec moins de boîtes (évidemment, sans appliquer l'algorithme) ?

6. Quels conditionnements peut-on réaliser en utilisant une boîte de chaque sorte au maximum parmi 5 boîtes de capacités 1, 2, 4, 8, 16 ?

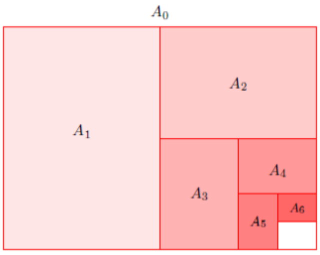
Seconde partie de l'épreuve

Exercice académique numéro 1

La constante de Pythagore

Partie A : format de papier

Le format papier A_0, A_1, A_2… est aujourd'hui la norme dans beaucoup de pays. Il a été conçu pour satisfaire à la définition du rectangle diagonal : en pliant une feuille en deux selon le schéma ci-dessous, on obtient un nouveau rectangle dont le rapport des dimensions est le même que celui du rectangle initial.



Les premières tentatives de légalisation de ce type de format ont pour cadre la Révolution française et les projets d'élaboration de normes dont celles du mètre étalon. Rapidement oubliée en France, c'est en Allemagne que ressurgit l'idée de cette norme. Elle s'impose à la communauté internationale au début du 20^e siècle. L'avènement des machines à photocopier a conforté l'intérêt du rectangle diagonal comme format de référence.

1. Notons L la longueur et l la largeur d'un rectangle diagonal. Montrer que $\frac{L}{l} = \sqrt{2}$.

2. Sachant que l'aire d'une feuille A_0 est de 1 m², retrouver le format au mm près d'une feuille A4.

Partie B : Les mathématiques, c'est dangereux !

Selon Pythagore « tout est nombre ». Lui et ses disciples pensaient en outre que tous les nombres étaient des fractions. C'est dans le groupe des pythagoriciens que fut élaborée la preuve que la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1, c'est à dire $\sqrt{2}$, est un nombre irrationnel : ce fut un énorme scandale. La légende raconte qu'un des disciples, Hyppase de Métaque, accusé d'avoir révélé cette découverte, périt noyé, jeté à la mer par ses condisciples. C'est pourquoi $\sqrt{2}$ est parfois appelée la constante de Pythagore.

1. Montrer que le carré d'un nombre pair est pair et que le carré d'un nombre impair est impair.

2. Supposons qu'il existe une fraction irréductible telle que $\sqrt{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$.

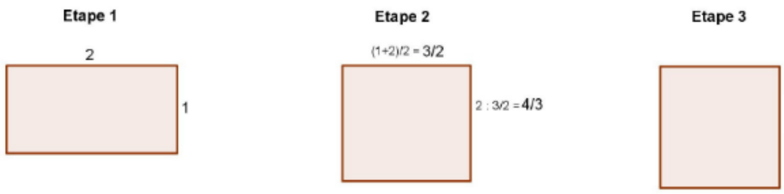
- ***a.*** Montrer que $a^2 = 2b^2$. Quelle est la parité de a ?
- ***b.*** En déduire que *b* est aussi un nombre pair.
- ***c.*** Pourquoi est-il absurde de penser qu'une telle fraction existe ?

3. Peut-on affirmer que $\sqrt{\mathbf{2}} = \dfrac{22\,619\,537}{15\,994\,428}$?

Partie C

Pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$, Héron d'Alexandrie propose une méthode fondée sur la construction d'une suite de rectangles d'aire 2. Il semblerait que cette méthode ait été employée par les babyloniens.

- On part d'un rectangle de longueur 2 (et donc de largeur 1) ;
- À chaque étape, on construit **un rectangle d'aire 2** dont la longueur est la moyenne des dimensions du rectangle précédent.



1. Calculer les dimensions du rectangle obtenu à l'étape 3. Dans le développement décimal de $\sqrt{\mathbf{2}}$, combien de décimales exactes obtient-on à cette étape ?

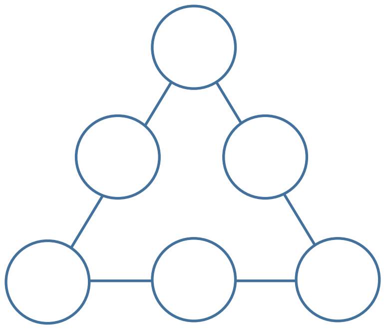
2. Proposer un algorithme qui permettrait d'obtenir les *n* premières décimales de $\sqrt{\mathbf{2}}$ en utilisant cette méthode, n étant un entier naturel choisi par l'utilisateur.

Actuellement les mathématiciens japonais Kanada et Takahashi détiennent le record : ils ont obtenu plus de 137 milliards de décimales exactes dans le développement décimal de $\sqrt{2}$

Exercice académique numéro 2

Nombres entiers, triangle et pyramide

Partie A



Les six nombres entiers compris entre 1 et 6 sont à placer dans six cercles disposés en triangle (*voir ci-contre*), chaque cercle ne pouvant recevoir qu'un entier. On considère que deux configurations sont identiques si elles correspondent au même placement relatif des entiers par rotation du triangle.

Objectif : rechercher toutes les configurations pour lesquelles les sommes des nombres entiers sont égales sur chaque côté du triangle.

1. On considère la situation où les nombres entiers 4, 5 et 6 sont disposés sur les sommets du triangle.

- ***a.*** Donner une disposition des nombres 1, 2 et 3 pour laquelle les sommes des entiers sont égales sur chaque côté du triangle.
- ***b.*** En déduire une configuration différente de la précédente répondant également au problème.

On considère, dans la suite de l'exercice, une configuration pour laquelle les sommes des entiers sont égales sur chaque côté du triangle. On note *S* cette somme commune.

2. On s'intéresse à la somme des entiers figurant sur les trois côtés du triangle (les sommets sont comptés deux fois) c'est-à-dire à $3 \times S$.

- ***a.*** Montrer que $3 \times S$ est un nombre entier compris entre 27 et 36.
- ***b.*** En déduire les valeurs possibles pour $3 \times S$, puis pour S.

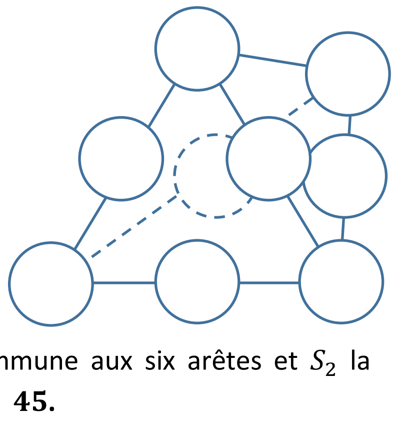
3.

- ***a.*** Montrer que la somme des entiers situés aux sommets du triangle est un multiple de 3, puis que celle des entiers situés aux milieux des côtés du triangle est également un multiple de 3.
- ***b.*** Dresser la liste de ces deux familles de sommes complémentaires.

Par exemple : la somme 1 + 2 + 3 est associée à la somme 4 + 5 + 6.

4. Déduire des questions précédentes toutes les configurations distinctes pour lesquelles les sommes des entiers sont égales sur chaque côté du triangle.

Partie B : On considère maintenant une pyramide à base triangulaire dans laquelle il s'agit de placer les neuf nombres entiers allant de 1 à 9 en respectant les mêmes règles que dans la partie 1.



Objectif : rechercher s'il existe des configurations pour lesquelles les sommes des entiers sont égales sur chaque arête de la pyramide.

En admettant qu'une telle configuration existe et en notant S_1 la somme commune aux six arêtes et S_2 la somme des entiers situés aux sommets de la pyramide, justifier que $\mathbf{6S_1 = 2S_2 + 45.}$

Que peut-on en conclure quant au nombre de configurations pour lesquelles les sommes des entiers sont égales sur chaque arête de la pyramide ?