Olympiades académiques de mathématiques

Classes de premières (toutes séries sauf S)

Académies de Caen et de Rouen

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures au maximum chacune. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués à des moments différents**. Les copies rédigées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux ») sont ramassées avant le début de la seconde partie. Sauf en cas de force majeure aucun candidat n'est autorisé à quitter la salle de composition moins de deux heures après le début.

Les calculatrices sont autorisées.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Première partie de l'épreuve

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Géométrie de l'à-peu-près

Mesures d'angles à peu près

On dit qu'un triangle ABC est à peu près rectangle en un sommet A si la mesure de l'angle en A est dans l'intervalle [75°, 105°]. On dit qu'un triangle ABC est à peu près isocèle en un sommet A si les mesures des angles en B et en C diffèrent de 15° au maximum.

1. ***a.*** Un triangle rectangle est-il à peu près rectangle ? Un triangle isocèle est-il à peu près isocèle ?
b. Un triangle peut-il être rectangle en deux sommets ? À peu près rectangle en deux sommets ?
Le cas échéant, quand il est en plus acutangle (c'est-à-dire que tous ses angles sont aigus), est-il à peu près isocèle ?

2. Existe-t-il un triangle acutangle qui ne soit ni à peu près rectangle, ni à peu près isocèle ?

3. Écrire un programme (en langage naturel ou calculatrice), à recopier sur la copie, testant si un triangle ABC dont on connaît les trois angles en A, B et C est à peu près isocèle.

Mesures de longueurs à peu près

Dans cette partie, on suppose qu'une unité de longueur a été donnée dans le plan, et on adopte les définitions suivantes :
- Deux points sont à peu près égaux si leur distance est inférieure ou égale à 0,1 ;
- Deux segments sont à peu près de même longueur si leurs longueurs diffèrent de 0,1 ou moins ;
- Un triangle est à peu près équilatéral si les longueurs de ses côtés diffèrent, deux à deux, de 0,1 ou moins.

4. ***a.*** Un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure (exactement) 1 peut-il être à peu près équilatéral ?
b. Un triangle rectangle peut-il être à peu près équilatéral ?

5. On considère un cercle, de centre O de rayon (exactement) 2 et deux points de ce cercle : A, fixe, et B, mobile. On appelle I le milieu du segment $[OA]$ et H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA).

a. Représenter sur une figure l'ensemble des points B pour lesquels H et I sont à peu près égaux.
En calculer la longueur (le résultat sera donné arrondi au centième).
b. Si H et I sont à peu près égaux, le triangle AOB est-il à peu près équilatéral ?

Une statistique sur la population des triangles

On convient de caractériser tout triangle ABC par les mesures x et y de ses angles en A et B. Chaque triangle (et avec lui ceux qui ont les mêmes angles, qui lui sont donc semblables) est représenté par le point de coordonnées (x, y) dans le plan rapporté à un repère orthonormé. On choisit de représenter la mesure 10° par 1 cm.

6. Figurer sur un schéma (accompagné d'une légende explicite) :
a. Le domaine $\mathcal{T}$ constitué des points représentant tous les triangles ;
b. Le point E représentant les triangles équilatéraux ;
c. L'ensemble des points représentant les triangles rectangles.

7. ***a.*** Quelle partie $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{T}$ représente les triangles acutangles ?
b. Si on estime la proportion des triangles acutangles dans l'ensemble des triangles par le rapport de l'aire de $\mathcal{A}$ à l'aire de $\mathcal{T}$, quelle est cette proportion ?

8. Quelle partie $\mathcal{R}$ du domaine $\mathcal{T}$ représente les triangles acutangles à peu près rectangles (au sens de la première partie) ? Quelle est leur proportion (dans le même sens que ci-dessus) dans l'ensemble des triangles ?

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

Boules de même couleur

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On dispose d'une urne contenant n boules pouvant être de différentes couleurs.
Le jeu consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis, sans remettre celle-ci dans l'urne, à extraire une seconde boule de l'urne. Le joueur a gagné lorsque les deux boules tirées sont de la même couleur.
On admet qu'à chaque tirage, toutes les boules de l'urne ont la même probabilité d'être tirées.
On dit que le jeu est équitable lorsque la probabilité $P(G)$ que le joueur gagne est égale à $\frac{1}{2}$.

1. ***a.*** Démontrer que si l'urne contient 10 boules dont 4 blanches et 6 rouges alors $P(G) = \frac{7}{15}$.
b. Calculer $P(G)$ lorsque l'urne contient 12 boules dont 4 blanches, 6 rouges et 2 noires.

2. Dans cette question, l'urne contient 6 boules rouges et d'autres boules qui sont toutes blanches.
a. Soit x le nombre de boules blanches contenues dans l'urne.
Démontrer que $P(G) = \frac{x(x-1)+30}{(x+6)(x+5)}$.
b. Combien faudrait-il de boules blanches pour que le jeu soit équitable ?

3. Dans cette question, l'urne ne contient que des boules de deux couleurs différentes.
a. On suppose que l'urne présente la configuration (a, b) c'est-à-dire qu'elle contient, par exemple, a boules rouges et b boules blanches. Démontrer que le jeu est équitable lorsque $n = (a-b)^2$.
b. Réciproquement, démontrer que si n est le carré d'un entier p alors il existe deux entiers naturels a et b avec $a \geq b$ que l'on exprimera en fonction de p tels que la configuration (a, b) conduise à un jeu équitable.
c. Donner six couples (a, b) conduisant à un jeu équitable.

4. Dans cette question, l'urne contient des boules de trois couleurs différentes selon la configuration (a, b, c), c'est-à-dire, par exemple, a boules blanches, b rouges et c noires.
a. Montrer que si $n = 13$, le jeu est équitable lorsque $a^2 + b^2 + c^2 = 91$.
En déduire une configuration (a, b, c) conduisant à un jeu équitable pour $n = 13$.
b. Pour un nombre quelconque de boules, montrer que si le couple (x, y) conduit à un jeu équitable pour deux couleurs alors il existe une unique valeur de z non nulle telle que le triplet (x, y, z) conduise également à un jeu équitable pour trois couleurs.
c. Donner un triplet (a, b, c) conduisant à un jeu équitable pour trois couleurs.

5. On suppose que l'urne contient des boules de m couleurs différentes où $m \geq 2$.
Démontrer que la configuration $(1,3,9, \dots, 3^{m-1})$ conduit à un jeu équitable.

Olympiades académiques de mathématiques

Seconde partie de l'épreuve

Exercices académiques

Classes de premières (toutes séries sauf S)

Académies de Caen et de Rouen

Les calculatrices sont autorisées.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Seconde partie de l'épreuve

Exercice académique numéro 1

Les mots de passe

A - Un résultat préliminaire

Soient a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$.
On considère l'équation du second degré $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$.

1. Démontrer que si cette équation admet deux solutions distinctes, alors leur produit est égal à $\frac{c}{a}$.
2. Démontrer que si a et c sont de signes différents alors l'équation admet deux solutions distinctes de signes différents.

B - Extraction de décimales

1. Soit x un nombre réel.

On appelle **partie entière** de x l'unique entier n tel que $n \leq x < n + 1$.
On note alors $E(x)$ cet entier n.
Par exemple $E(\sqrt{2}) = 1$ et $E(100\sqrt{2}) = 141$.

   a. Donner $E(10\pi)$, $10E(10\pi)$ puis $E(100\pi - 10E(10\pi))$.
   b. Vérifier que $E(1000\pi - 10E(100\pi)) = 1$.
   c. Calculer $E\left(10^k\pi - 10E(10^{k-1}\pi)\right)$ pour l'entier $k = 6$.

2. On considère la fonction B qui à un réel x associe le bloc des six chiffres qui suivent la virgule dans l'écriture décimale de x affichée par la calculatrice.

   Par exemple $B(\sqrt{2}) = 414213$ et $B(1{,}05) = 050000$.

   a. Donner $B(\pi)$.
   b. À l'aide de la question 1, écrire un algorithme permettant d'obtenir $B(x)$ à chaque saisie de x par un utilisateur.

C - La fonction « Password »

L'administrateur d'un site internet a créé un petit algorithme utilisant la fonction B précédente afin de générer automatiquement le mot de passe d'un utilisateur en fonction de sa date de naissance.

Pour la suite, j désigne le jour, m le mois et a l'année de naissance de l'utilisateur.

1. On considère l'équation (E) : $jx^2 + mx + 1\,890 - a = 0$.
   Démontrer que, compte tenu des valeurs possibles pour j, m et a, cette équation admet deux solutions distinctes de signes différents. On notera, par la suite, $r(j, m, a)$ la solution positive de cette équation.

2. On considère la fonction suivante :

Fonction Password(j, m, a)
$\quad r \leftarrow r(j, m, a))$
$\quad$ Renvoyer$(B(r))$

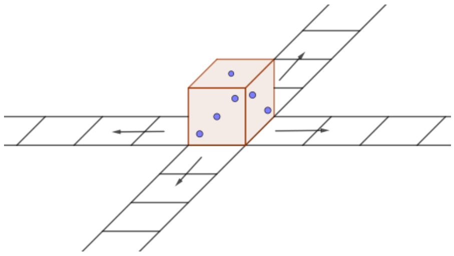
   a. Que renvoie la fonction Password pour Mileva qui est née le 19 juin 1974 ?
   b. Justifier que cette fonction permet toujours d'obtenir un mot de passe.
   c. L'administrateur a décidé, pour des raisons de sécurité, que le mot de passe 000000 est interdit.
      i. Zinedine est né le 1er décembre 1998.
         Vérifier que, dans ce cas, la fonction Password donne le mot de passe interdit.
      ii. Albert, qui n'est pas encore centenaire, a son anniversaire le fameux « Pi Day », c'est à dire le 14 mars. Sachant que la fonction Password lui attribue le mot de passe interdit, combien de bougies va-t-il souffler cette année ?

Exercice académique numéro 2

Un dé baladeur

On considère un damier dont les dimensions ne sont pas limitées.

Un dé à six faces est placé sur l'une des cases de ce damier.
Il se déplace en roulant d'une face sur l'autre.



Définition : on dira que le dé vaut n, avec $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, si n est le nombre de points sur la face du dessus du dé.

Convention : on conviendra que le dé peut rouler vers la droite, vers la gauche, vers l'avant ou vers l'arrière.

Exemple : dans la figure ci-dessus le dé vaut 1.

S'il roule une fois vers la gauche, il vaudra 2. S'il roule une fois vers l'arrière il vaudra 3.

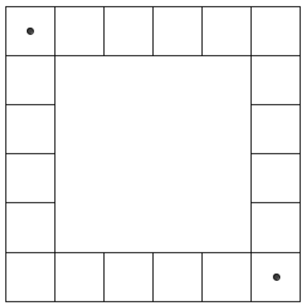
Propriété du dé : la somme du nombre de points de deux faces opposées est toujours égale à 7.

Dans tout l'exercice, la position initiale du dé sera celle de la figure ci-dessus.

1.
   a. Quelles sont successivement les douze premières valeurs du dé, si on le fait rouler vers la droite ? Que constate-t-on ?
   b. Construire un algorithme qui permette d'afficher la somme des n premières valeurs du dé avec n comme entrée, si on le fait rouler vers la droite.

2. On fait rouler successivement le dé sur quatre cases vers la droite, l'avant, la gauche puis l'arrière, pour qu'il revienne à sa case de départ. Combien doit-il faire de tours pour qu'il reprenne la valeur 1 sur la case de départ ?

3. On considère un carré de n cases de côté. La case de départ est celle qui est repérée en haut à gauche. Le dé parcourt, en roulant d'abord vers la droite, puis vers le bas, le chemin constitué par les cases en bordure de carré.



   a. Montrer que si n est pair alors la valeur du dé dans la case diagonalement opposée à la case de départ est 4 ou 3.

      On admet que si n est pair et que le dé parcourt, depuis la case de départ, le carré dans l'autre sens (d'abord vers le bas, puis vers la droite), alors la valeur du dé dans la case diagonalement opposée à la case de départ est 5 ou 2.
      Par conséquent, dans le cas où n est pair, selon que le dé parcourt le carré dans le sens direct ou inverse des aiguilles d'une montre, la valeur du dé sera différente sur la case diagonalement opposée à la case de départ.

   b. Montrer que, si n est impair, la valeur du dé dans la case associée au sommet diagonalement opposé à la case de départ est 1.

   c. Quelle condition n doit-il vérifier pour que le dé retrouve une valeur égale à 1 sur sa case de départ après un tour ?