

L'algorithmique par le biais d'un problème

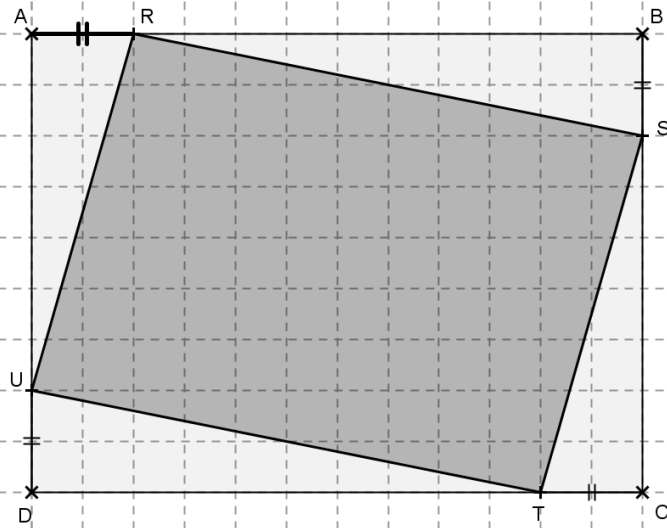
La situation

On considère un parallélogramme RSTU inscrit dans un rectangle ABCD :

R est un point du segment [AB].
AB = 12 cm, BC = 9 cm.
AR = BS = CT = DU.

Phase 0 :

Construire la figure pour la longueur AR de votre choix.
Calculer l'aire du parallélogramme RSTU.



Phase 1 : Programme de calcul

Quelles sont les valeurs possibles de AR ?

Décrire un algorithme permettant de déterminer l'aire du parallélogramme pour une valeur quelconque de AR.

- Mathématiques : calcul littéral et calcul d'aires ;
- Mise en œuvre : plusieurs algorithmes, plus ou moins concis, sont envisageables ;
- Notions algorithmiques : *entrée/sortie*, *affectation*. La notion de *test* peut être introduite pour éviter de calculer l'aire pour des valeurs inconsistantes de AR.

Phase 2 : Balayage

On nomme x la longueur AR exprimée en cm et $\mathcal{A}(x)$ l'aire du parallélogramme RSTU.

Décrire un algorithme permettant de réaliser un tableau de la fonction

$f: x \mapsto \mathcal{A}(x)$ pour les valeurs de x comprises entre 0 et 9 avec un pas de 1 puis de 0,2.

Modifier cet algorithme pour représenter graphiquement ces valeurs de la fonction.

- Mathématiques : calcul littéral, notion de fonction et représentation graphique ;
- Mise en œuvre : reprise des calculs effectués lors de la phase 1 ;
- Notions algorithmiques : *boucle itérative*, graphiques et éventuellement utilisation d'une fonction comme sous-programme.

Phase 3 : Recherche d'une valeur

Le parallélogramme RSTU représente l'ouverture d'une bouche de ventilation. Pour des raisons de sécurité, la ventilation se coupe automatiquement lorsque l'aire de l'ouverture devient inférieure à 60 cm^2 .

D'après la représentation graphique de la fonction f^* , donner une valeur approchée des valeurs de AR qui provoquent l'arrêt de la ventilation.

Décrire un algorithme permettant de déterminer des approximations plus précises de ces valeurs.

* ou g telle que $g(x) = f(x) - 60$

- Mathématiques : variation, signe d'une fonction ;
- Mise en œuvre : dichotomie ;
- Notions algorithmiques : *boucle conditionnelle*.

Phase 4 : Calcul statistique

La commande de réglage de l'ouverture de la ventilation ne fonctionne plus et on suppose que chaque jour la ventilation se fixe sur une valeur aléatoire de AR.

Réaliser un tirage aléatoire de cent mille valeurs de AR comprises entre 0 et 9 cm.

En déduire une valeur approchée de la fréquence (en %) de cas correspondant à la fermeture automatique de la ventilation.

Par quel calcul ne faisant appel à aucun tirage aléatoire pourrait-on également déterminer cette fréquence de non-fonctionnement ?

- Mathématiques : statistiques et probabilité ;
- Notions algorithmiques : *tirage aléatoire*.

Phase 5 : Minimum

Au fil du temps, on constate que la ventilation ne semble pas se fixer chaque jour sur une valeur aléatoire mais tend plutôt à « choisir » une position dans laquelle le périmètre de l'ouverture est le plus petit possible.

Exprimer le périmètre du parallélogramme RSTU en fonction de AR.

Décrire un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée de la valeur minimale de ce périmètre.

Cette valeur correspond-elle à un état de fonctionnement ou de non-fonctionnement de la ventilation ?

Cette valeur est-elle identique à celle qui minimise l'aire du parallélogramme ?

- Mathématiques : calcul littéral, minimum d'une fonction, aire et périmètre ;
- Mise en œuvre : recherche par balayage (ou alternance et diminution du pas) ;
- Notions algorithmiques : boucles conditionnelles (imbriquées).

Résolution (ici avec Algobox)

Phase 1 : programme de calcul

Variables, affectation, entrée/sortie

<pre>1 VARIABLES 2 AR EST_DU_TYPE NOMBRE 3 BR EST_DU_TYPE NOMBRE 4 AU EST_DU_TYPE NOMBRE 5 A1 EST_DU_TYPE NOMBRE 6 A2 EST_DU_TYPE NOMBRE 7 A EST_DU_TYPE NOMBRE 8 texte EST_DU_TYPE CHAINE 9 DEBUT_ALGORITHME 10 LIRE AR 11 BR PREND_LA_VALEUR 12-AR 12 AU PREND_LA_VALEUR 9-AR 13 A1 PREND_LA_VALEUR AR*AU/2 14 A2 PREND_LA_VALEUR BR*AR/2 15 A PREND_LA_VALEUR 9*12-(2*A1+2*A2) 16 texte PREND_LA_VALEUR "Si AR = "+AR+" cm, l'aire mesure "+A+" cm²." 17 AFFICHER texte 18 FIN_ALGORITHME</pre>	<pre>1 VARIABLES 2 AR EST_DU_TYPE NOMBRE 3 A EST_DU_TYPE NOMBRE 4 texte EST_DU_TYPE CHAINE 5 DEBUT_ALGORITHME 6 LIRE AR 7 A PREND_LA_VALEUR 108-AR*(9-AR)- AR*(12-AR) 8 texte PREND_LA_VALEUR "Si AR = "+AR+" cm, l'aire mesure "+A+" cm²." 9 AFFICHER texte 10 FIN_ALGORITHME</pre>
---	---

Cet algorithme est évidemment simplifiable en correspondance avec la réduction du calcul algébrique de l'aire.

Test

<pre>1 VARIABLES 2 AR EST_DU_TYPE NOMBRE 3 BR EST_DU_TYPE NOMBRE 4 AU EST_DU_TYPE NOMBRE 5 A1 EST_DU_TYPE NOMBRE 6 A2 EST_DU_TYPE NOMBRE 7 A EST_DU_TYPE NOMBRE 8 texte EST_DU_TYPE CHAINE 9 DEBUT_ALGORITHME 10 LIRE AR 11 SI (AR>=0 ET AR<=9) ALORS 12 DEBUT_SI 13 BR PREND_LA_VALEUR 12-AR 14 AU PREND_LA_VALEUR 9-AR 15 A1 PREND_LA_VALEUR AR*AU/2 16 A2 PREND_LA_VALEUR BR*AR/2 17 A PREND_LA_VALEUR 9*12-(2*A1+2*A2) 18 texte PREND_LA_VALEUR "Si AR = "+AR+" cm, l'aire mesure "+A+" cm²." 19 AFFICHER texte 20 FIN_SI 21 SINON 22 DEBUT_SINON 23 AFFICHER "L'aire n'est pas définie pour cette valeur de AR." 24 FIN_SINON 25 FIN_ALGORITHME</pre>

Ajout d'un test limitant le calcul de l'aire aux valeurs possibles de AR.

Phase 2 : balayage

Boucle itérative

<pre>1 VARIABLES 2 x EST_DU_TYPE NOMBRE 3 A EST_DU_TYPE NOMBRE 4 texte EST_DU_TYPE CHAINE 5 DEBUT_ALGORITHME 6 POUR x ALLANT_DE 0 A 9 7 DEBUT_POUR 8 A PREND_LA_VALEUR 108-x*(9-x)-x*(12-x) 9 texte PREND_LA_VALEUR "f("+x+") = "+A 10 AFFICHER texte 11 FIN_POUR 12 FIN_ALGORITHME</pre>	<pre>1 VARIABLES 2 x EST_DU_TYPE NOMBRE 3 A EST_DU_TYPE NOMBRE 4 DEBUT_ALGORITHME 5 POUR x ALLANT_DE 0 A 9 6 DEBUT_POUR 7 A PREND_LA_VALEUR 108-x*(9-x)-x*(12-x) 8 TRACER_POINT (x,A) 9 FIN_POUR 10 FIN_ALGORITHME</pre>
--	---

Affichage de la table des valeurs ou affichage graphique.

Boucle de pas différent de 1

<pre>1 VARIABLES 2 x EST_DU_TYPE NOMBRE 3 A EST_DU_TYPE NOMBRE 4 i EST_DU_TYPE NOMBRE 5 DEBUT_ALGORITHME 6 POUR i ALLANT_DE 0 A 9/0.2 7 DEBUT_POUR 8 //Simulation d'un pas d'itération de 0,2 9 x PREND_LA_VALEUR i*0.2 10 A PREND_LA_VALEUR 108-x*(9-x)-x*(12-x) 11 TRACER_POINT (x,A) 12 FIN_POUR 13 FIN_ALGORITHME</pre>
--

Attention, dans sa version actuelle Algobox ne gère pas les boucles itératives de pas différent de 1.

Phase 3 : recherche d'une valeur

Boucle conditionnelle

<pre>1 VARIABLES 2 A EST_DU_TYPE NOMBRE 3 B EST_DU_TYPE NOMBRE 4 C EST_DU_TYPE NOMBRE 5 FA EST_DU_TYPE NOMBRE 6 FB EST_DU_TYPE NOMBRE 7 FC EST_DU_TYPE NOMBRE 8 P EST_DU_TYPE NOMBRE 9 DEBUT_ALGORITHME 10 FA PREND_LA_VALEUR 1 11 FB PREND_LA_VALEUR 1 12 P PREND_LA_VALEUR 0.0001 13 TANT_QUE (FA*FB>0) FAIRE 14 DEBUT_TANT_QUE 15 AFFICHER "A = ?" 16 LIRE A 17 AFFICHER "B = ?" 18 LIRE B 19 FA PREND_LA_VALEUR F1(A) 20 FB PREND_LA_VALEUR F1(B)</pre>	<pre>21 FIN_TANT_QUE 22 TANT_QUE (B-A>P) FAIRE 23 DEBUT_TANT_QUE 24 C PREND_LA_VALEUR (A+B)/2 25 FC PREND_LA_VALEUR F1(C) 26 FA PREND_LA_VALEUR F1(A) 27 SI (FA*FC>0) ALORS 28 DEBUT_SI 29 A PREND_LA_VALEUR C 30 FIN_SI 31 SINON 32 DEBUT_SINON 33 B PREND_LA_VALEUR C 34 FIN_SINON 35 FIN_TANT_QUE 36 AFFICHER "X = " 37 AFFICHER A 38 FIN_ALGORITHME</pre>
---	---

Fonction numérique utilisée :
 $F1(x) = 2 * \text{pow}(x, 2) - 21 * x + 48$

Phase 4 : calcul statistique

Tirage aléatoire

```
1  VARIABLES
2  AR EST_DU_TYPE NOMBRE
3  NB_cas_Fermeture EST_DU_TYPE NOMBRE
4  i EST_DU_TYPE NOMBRE
5  Fréquence EST_DU_TYPE NOMBRE
6  DEBUT_ALGORITHME
7  NB_cas_Fermeture PREND_LA_VALEUR 0
8  POUR i ALLANT_DE 1 A 100000
9      DEBUT_POUR
10     AR PREND_LA_VALEUR random()*9
11     SI (F1(AR)<60) ALORS
12         DEBUT_SI
13             NB_cas_Fermeture PREND_LA_VALEUR NB_cas_Fermeture+1
14             FIN_SI
15         FIN_POUR
16     Fréquence PREND_LA_VALEUR NB_cas_Fermeture/1000
17     AFFICHER "Estimation de la fréquence (en %) de non-fonctionnement :"
```

Fonction numérique utilisée :
 $F1(x) = 2 * \text{pow}(x, 2) - 21 * x + 108$

Remarque : Algobox dispose d'outils de calculs statistiques (moyenne, médiane, quartiles ...) non exploités ici.

Phase 5 : minimum

Balayage, alternance de la direction de recherche et diminution du pas

```
1  VARIABLES
2  x EST_DU_TYPE NOMBRE
3  P EST_DU_TYPE NOMBRE
4  FA EST_DU_TYPE NOMBRE
5  FB EST_DU_TYPE NOMBRE
6  sens EST_DU_TYPE NOMBRE
7  texte EST_DU_TYPE CHAINE
8  DEBUT_ALGORITHME
9  LIRE x
10  sens PREND_LA_VALEUR 1
11  P PREND_LA_VALEUR 1
12  TANT_QUE (P>0.0000001) FAIRE
13      DEBUT_TANT_QUE
14          FA PREND_LA_VALEUR F1(x)
15          x PREND_LA_VALEUR x+P*sens
16          FB PREND_LA_VALEUR F1(x)
17          SI ((FA-FB)<0) ALORS
18              DEBUT_SI
19                  texte PREND_LA_VALEUR "Minimum pour x = "+x+" à "+P+" près."
20                  AFFICHER texte
21              sens PREND_LA_VALEUR -sens
22              P PREND_LA_VALEUR P*0.1
23              FIN_SI
24          FIN_TANT_QUE
25
26  FIN_ALGORITHME
```

Fonction numérique utilisée :
 $F1(x) = 2 * (\text{sqrt}(2 * \text{pow}(x, 2) - 18 * x + 81) + \text{sqrt}(2 * \text{pow}(x, 2) - 24 * x + 144))$