Problème 1
Les premiers sont les derniers

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on dispose de la décomposition en facteurs premiers

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

où $p_1, p_2, \ldots p_k$, qu'on suppose distincts, sont les diviseurs premiers de n, et où les exposants $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont des entiers strictement positifs. On pose alors

$$f(n) = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_k^{p_k}.$$

Par exemple, si $n = 720 = 2^4 3^2 5^1$, on a $f(n) = 4^2 2^3 1^5 = 128$.
En posant de plus $f(1) = 1$, on obtient une fonction f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$.
Enfin, pour tous entiers $n \geqslant 1$ et $i \geqslant 0$, on note

$$f^0(n) = n \quad \text{et} \quad f^{i+1}(n) = f(f^i(n))\,.$$

Par exemple :

$$f^0(720) = 720,\ f^1(720) = f(720) = 128,\ f^2(720) = f(128) = 49$$

Le but de ce problème est d'étudier le comportement de la fonction f et des suites $(f^i(n))_{i \in \mathbb{N}}$ pour n fixé.

1°) (a) Calculer $f(2012)$.

(b) Déterminer les nombres $f^i(36^{36})$ pour $0 \leqslant i \leqslant 3$. Que peut-on dire des suivants ?

2°) (a) Donner un exemple d'entier $n \geqslant 1$ tel que, pour tout entier naturel i, on ait

$$f^{i+2}(n) = f^i(n) \quad \text{et} \quad f^{i+1}(n) \neq f^i(n)\,.$$

(b) Montrer que la fonction f n'est ni croissante ni décroissante.

3°) Résoudre : (a) l'équation $f(n) = 1$; (b) l'équation $f(n) = 2$; (c) l'équation $f(n) = 4$.

4°) (a) Pour tous entiers $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 0$, montrer que $ab \leqslant a^b$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$ des entiers tels que $a_i \geqslant 2$ et $b_i \geqslant 0$ pour tout i. Montrer que

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_k b_k \leqslant a_1^{b_1} a_2^{b_2} \cdots a_k^{b_k}\,.$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $f(f(n)) \leqslant n$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un entier naturel r que, pour tout entier $i \geqslant r$, on ait $f^{i+2}(n) = f^i(n)$.

5°) Soit E l'ensemble des entiers $n \geqslant 2$ n'ayant que des exposants strictement supérieurs à 1 dans leur décomposition en facteurs premiers.

(a) Montrer que, pour tout entier $a \geqslant 2$, il existe des entiers naturels α et β tels que $a = 2\alpha + 3\beta$.

(b) En déduire que si n appartient à E, alors il existe un élément m de E tel que $f(m) = n$.

(c) Donner un élément m de E tel que $f(m) = 2012^{2012}$.

(d) Que peut-on dire de la réciproque du (b) ?

Problème 2
Une suite majoritairement décroissante

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels positifs telle que $u_0 = 1$ et telle que, pour tout entier $n \geqslant 1$, au moins la moitié des termes $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ soient supérieurs ou égaux à $2u_n$.
Montrer que u_n tend vers 0.

Problème 3
Le facteur sonne toujours une fois (et une seule)

Un facteur doit distribuer le courrier dans une rue. Celle-ci ne comporte qu'une seule rangée de maisons régulièrement espacées et numérotées $1, 2, \dots, n$, où n est un entier supérieur ou égal à 2. Le facteur doit distribuer une lettre par maison. Pour cela, il laisse son vélo à la maison 1, y dépose le courrier correspondant, et ensuite distribue les lettres au hasard, puis revient à la maison 1 récupérer son vélo. Il effectue ainsi un trajet, représenté par les numéros successifs des maisons où il a déposé le courrier.
Par exemple, si $n = 5$, un trajet possible est $1, 5, 2, 4, 3, 1$. La distance totale parcourue, appelée longueur du trajet, vaut 12 dans ce cas car $|5-1| + |2-5| + |4-2| + |3-4| + |1-3| = 12$.
Un autre trajet possible est $1, 3, 5, 4, 2, 1$, de longueur 8.

1°) Combien y a-t-il de trajets possibles ?

2°) (a) Montrer que tout trajet est de longueur supérieure ou égale à $2(n-1)$.

(b) Combien y a-t-il de trajets de longueur minimale ?

3°) (a) Dans les cas $n = 5$ et $n = 6$, déterminer la longueur maximale d'un trajet et donner un exemple de trajet de longueur maximale.

(b) Pour n quelconque, déterminer la longueur maximale d'un trajet.

4°) On tire un trajet au hasard (tous les trajets sont équiprobables). Quelle est l'espérance de la longueur du trajet ?