Épreuve pratique de mathématiques

Été 2009

Instructions pour l'organisation

1 Expérimentation d'une épreuve pratique de mathématiques

Ce texte précise à l'attention du chef de centre quelques points du protocole qui se trouve ci-après.

1.1 Les sujets

Vous avez reçu, avec ce document, les vingt-cinq sujets. Chaque sujet est composé de trois parties :
– la fiche élève qui sera utilisée le jour de l'épreuve,
– la fiche professeur destinée aux seuls examinateurs,
– la fiche d'évaluation qui devra être reproduite en nombre suffisant pour que la prestation de chaque candidat soit relevée sur une telle fiche.

Les sujets sont soumis à la confidentialité habituelle des sujets d'examen. Ils ne peuvent en aucun cas être diffusés. En particulier on veillera à ce que les fiches élèves utilisées le jour de l'épreuve soient récupérées à la fin de chaque passation.

Les examinateurs choisiront dans cette liste de vingt-cinq sujets ceux qu'ils utiliseront.

Le choix des sujets dans les établissements doit refléter la diversité des sujets proposés : au niveau de l'enseignement de spécialité, au niveau des contenus et des outils, dans le but de permettre un réel tirage au sort et une équité entre les candidats.

1.2 Les examinateurs

Il appartient au chef de centre de désigner les examinateurs parmi tous les professeurs de Mathématiques de l'établissement. On veillera à ce que ceux-ci soient en nombre suffisant pour que la passation de l'épreuve puisse se dérouler dans un temps assez bref et que chaque candidat soit examiné par un enseignant qui n'a pas, au cours de la présente année scolaire, la responsabilité d'une classe à laquelle ce candidat est affecté (on prendra notamment garde aux regroupements dans le cadre de l'enseignement de spécialité). Le chef de centre peut se rapprocher des inspecteurs pédagogiques régionaux, s'il le souhaite, pour cette désignation.

1.3 Le calendrier

Dès réception des sujets, le chef de centre en remet une copie aux examinateurs ***en insistant sur la confidentialité***. Il organise une réunion pour le choix des sujets et des dates de passation un mois avant les épreuves. Cette réunion fait l'objet d'un bref compte-rendu mentionnant les choix faits et les dates retenues ; il sera adressé à l'inspection pédagogique régionale.

Le déroulement des épreuves devrait avoir lieu à une date permettant une couverture correcte du programme de mathématiques. Chaque établissement reste libre de son calendrier.

À l'issue des épreuves les examinateurs se réunissent pour attribuer les notes. L'ensemble des fiches d'évaluation doit être conservé par l'établissement. Les notes attribuées sont renvoyées (à fin de traitement statistique) à l'inspection pédagogique régionale, **exclusivement** à l'aide du fichier qui se trouve dans le même dossier que l'ensemble des sujets (les deux versions de ce fichier[1] correspondent aux deux modèles de tableur les plus fréquemment utilisés).

[1] Ils sont initialement nommés `0009999Z.ods` (pour OpenOffice.org) et `0009999Z.xls` (pour Excel, Gnumeric)

1.4 L'organisation pratique des épreuves

Cette organisation est confiée à l'établissement pour s'adapter au mieux aux diverses contraintes locales. Chaque candidat est interrogé pendant une heure. Il est conseillé de ménager durant la journée des interruptions permettant aux examinateurs de se concerter et de compléter les fiches d'évaluation.

Pour toute question concernant cette épreuve veuillez vous mettre en rapport avec les IA-IPR.

2 Protocole de l'expérimentation d'une épreuve pratique de mathématiques

Il est proposé aux établissements volontaires de procéder à l'expérimentation d'une épreuve pratique de mathématiques en série scientifique au cours de l'année scolaire 2008-2009. Cette expérimentation se déroule selon le protocole suivant.

2.1 Objectifs et organisation de l'épreuve

L'objectif de l'épreuve est d'évaluer les compétences des élèves dans l'utilisation des calculatrices et de certains logiciels spécifiques en mathématiques. Il s'agit d'apprécier leur capacité à mobiliser les TICE pour résoudre un problème mathématique.

Les sujets proposés aux candidats sont des exercices mathématiques où l'utilisation des TICE (calculatrice graphique programmable, ordinateurs et logiciels spécifiques, tableurs, grapheur tableur, géométrie dynamique, calcul formel) intervient de manière significative dans la résolution du problème posé.

Une banque de sujets est élaborée au niveau national. Chaque sujet est composé :

1/ d'une « fiche élève » donnant l'énoncé et précisant ce qui est attendu du candidat ;

2/ d'une « fiche professeur » décrivant les intentions de l'auteur, des considérations sur l'environnement TICE du sujet et des commentaires sur l'évaluation ;

3/ d'une « fiche évaluation ».

Les trois documents ont le statut de sujets d'examen et sont confidentiels.

Dans la banque nationale de sujets, 25 sont retenus et transmis aux établissements au début du troisième trimestre de l'année scolaire.

2.2 Sélection des sujets

L'épreuve se déroule au sein du lycée fréquenté par l'élève. Dans chaque établissement, les professeurs, sous la responsabilité du chef d'établissement, choisissent parmi les 25 sujets retenus, ceux qui seront proposés aux élèves de l'établissement ; ce choix est guidé par les équipements disponibles et les enseignements assurés par les professeurs. Le jour de l'évaluation, les élèves tirent au sort un sujet parmi ceux retenus par l'établissement. Les élèves ayant choisi les mathématiques comme enseignement de spécialité tirent au sort une situation d'évaluation ayant rapport soit avec cet enseignement de spécialité, soit avec l'enseignement du tronc commun. Un même sujet peut être commun à plusieurs candidats passant au même moment dans la même salle.

Aucune modification ne peut être apportée aux fiches élèves.

Les inspecteurs d'académie-inspecteurs pédagogiques régionaux de mathématiques s'assurent que chaque établissement concerné a bien été destinataire des sujets. Il convient qu'ils soient aussi informés du calendrier de l'évaluation organisée dans chaque établissement et des sujets retenus.

2.3 Déroulement de l'épreuve

Les examinateurs sont les professeurs de mathématiques de l'établissement enseignant à tout niveau du lycée, convoqués par le chef d'établissement. Les professeurs convoqués s'approprient les sujets proposés, se concertent pour assurer le bon déroulement de l'évaluation et en fixent les dates en accord avec le proviseur.

Deux professeurs examinateurs, au moins, sont présents dans la salle où a lieu l'évaluation.

Un examinateur évalue au maximum quatre élèves qui ne sont pas ses élèves de l'année de classe terminale en cours. Ceux-ci peuvent composer sur un même sujet.

La convocation des élèves est assurée par le chef d'établissement, sa forme est laissée à son initiative. Il s'assurera que tous les élèves ont été avertis de la date de l'épreuve.

2.4 Notation des candidats

Les professeurs examinateurs élaborent, à partir de la fiche évaluation, une grille d'observation. Un exemplaire de cette grille, au nom de chaque candidat sert de support à l'évaluation de celui-ci ; elle porte la note qui lui est attribuée sur 20 points, exprimée en points entiers avec, éventuellement, un commentaire qualitatif.

Ce document ainsi que les productions écrites de l'élève sont agrafés ensemble et remis à l'issue de la correction au chef d'établissement.

La note obtenue à cette épreuve expérimentale ne sera pas prise en compte au baccalauréat pour la session 2009 ; elle peut, en revanche, être prise en compte lors des conseils de classe et figurer sur les bulletins trimestriels..

2.5 Pour en savoir plus ...

Pour toute information complémentaire, les établissements peuvent prendre contact avec les inspecteurs d'académie – inspecteurs pédagogiques régionaux de mathématiques, en charge de l'organisation de cette expérimentation, et consulter le site (rubrique Lycée) :

http ://igmaths.net/

Il est aussi possible de se reporter au rapport de l'expérimentation de cette épreuve en 2007 :

http ://www.education.gouv.fr/cid4909/experimentation-d-une-epreuve-pratique-de-mathematiques-au-baccalaureat-scientifique.html

Épreuve pratique de mathématiques

Été 2009

Fiches-élève

Étude d'un lieu géométrique

Énoncé

Dans le plan muni d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O. Soit P un point du segment [BC]. La droite perpendiculaire à (AP) passant par A coupe (CD) en Q. On note M le milieu du segment [PQ].

Partie A

1. En utilisant un logiciel de géométrie, construire une figure traduisant l'énoncé.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la construction.

2. Visualiser, à l'aide du logiciel, le lieu géométrique du point M lorsque le point P décrit le segment [BC].
   Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de ce lieu géométrique ?

   Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

Partie B

3. (a) À l'aide d'une isométrie bien choisie, déterminer la nature du triangle APQ.
   (b) Démontrer que M est l'image de P par une similitude directe s de centre A dont on précisera le rapport et l'angle.
   (c) En déduire le lieu géométrique du point M.

Production demandée

– La figure réalisée avec le logiciel.
– Les réponses à la question 3.

Encadrement d'une intégrale

Énoncé

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $f(x) = x^2e^{1-x^2}$.

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ On se propose de déterminer un encadrement de l'intégrale

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Partie A

1. Visualiser la courbe $\mathscr{C}$ sur l'écran et conjecturer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,1]$.
   Donner une interprétation géométrique de l'intégrale I.

   Appeler l'examinateur pour la vérification du tracé et la validation de la conjecture.

2. Soit n un entier naturel non nul. On pose $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ et $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

   (a) Réaliser à l'aide d'un tableur (ou de tout logiciel adapté, voire d'une bonne calculatrice) un tableau de calcul permettant de calculer S_n et T_n pour $n = 100$.

   (b) On admet que pour tout entier naturel non nul n :
   $$S_n \leqslant I \leqslant T_n.$$
   En déduire un encadrement de I et l'amplitude de cet encadrement.

   Appeler l'examinateur pour la vérification des calculs et des résultats.

Partie B

3. (a) Justifier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,1]$.

   (b) Calculer $T_n - S_n$ et justifier l'amplitude de l'encadrement trouvé précédemment.

   (c) Comment pourrait-on faire pour obtenir une approximation de I à $0,0005$ près ?

Production demandée

- La courbe tracée à l'écran.
- La visualisation à l'écran de la feuille de calcul réalisée à la question 2.
- Les démonstrations demandées à la question 3.

Étude d'un phénomène biologique

Énoncé

Une expérience portant sur l'étude de la croissance de bactéries (escherichia coli), durant deux heures dans un milieu liquide minimum glucosé, donne le tableau suivant (où t est la durée exprimée en heures et $D(t)$ la densité de cellules en fonction de la durée) :

t	0	0,1	0,3	0,57	0,6	0,7	0,9	1,2	1,47	1,72	1,95
$D(t)$	10,2	11,2	13,5	17,2	17,7	19,5	23,5	30,5	39	49,2	61

1. À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, représenter le nuage de points correspondant au tableau ci-dessus.

   Appeler le professeur pour vérifier le graphique.

   On recherche désormais une fonction qui approche la densité de population en fonction de la durée. La détermination d'une telle fonction passe par la recherche de quantités fixes.
2. Dans une telle situation, différentes hypothèses sont envisagées concernant l'accroissement de la densité ΔD. Est-elle proportionnelle :
   - à l'accroissement de la durée Δt, ce qui signifie que $\dfrac{\Delta D}{\Delta t}$ est constant ?
   - à D, ce qui signifie que $\dfrac{\Delta D}{D}$ est constant ?
   - à D et Δt, ce qui signifie que $\dfrac{\Delta D}{\Delta t \times D}$ est constant ?

   À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, vérifier que la troisième hypothèse est la mieux adaptée aux données.

   Appeler le professeur pour vérifier le tableau proposé.
3. (a) Expliquer pourquoi la relation $\dfrac{\Delta D}{\Delta t \times D} = k$, où k est une constante, conduit à considérer que la densité peut être représentée par une fonction dérivable f qui vérifie : $f'(t) = k.f(t)$.

   (b) Déterminer toutes les fonctions f qui vérifient $f'(t) = k.f(t)$.

   (c) Compte tenu des données dont on dispose, quelle formule peut-on proposer pour la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$?

   (d) Représenter, à l'aide d'un tableur ou de la calculatrice, cette fonction f et le nuage de points initial sur un même graphique.

   (e) Si le temps le permet : quel aurait été l'avantage d'introduire la quantité $d = \ln(D)$?

Production demandée

- Tableau de valeurs présentant t, $D(t)$, Δt, $\dfrac{\Delta D}{\Delta t}$, $\dfrac{\Delta D}{D}$, $\dfrac{\Delta D}{\Delta t \times D}$;
- vérification simple par comparaison ;
- réponses argumentées pour les trois premières questions de la question 3 ;
- aperçu, recopie ou impression d'écran de la courbe demandée.

Étude d'une configuration plane

Énoncé

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts O et P et la droite d passant par P et perpendiculaire à la droite (OP). Soit M un point variable appartenant à la droite d. On définit le point Q, quatrième sommet du rectangle $OPMQ$, puis les points R et S tels que les triangles MPR et MSQ soient équilatéraux, de sens direct.

Partie A

1. (a) En utilisant un logiciel de géométrie dynamique, représenter la situation proposée.

   (b) Lorsque le point M varie sur la droite d, quelle conjecture peut-on émettre à propos de la nature du triangle ORS ?

   > Appeler le professeur et lui montrer la figure. Lui indiquer la propriété conjecturée et proposer une procédure de contrôle de cette conjecture.

   (c) Sur la figure, construire le point G centre de gravité du triangle ORS.
   Lorsque M se déplace sur la droite d, quelle semble être la nature de la courbe sur laquelle le point G se déplace ?

   > Appeler le professeur pour faire vérifier la construction.
   > Formuler oralement la conjecture et expliquer comment elle a pu être émise.

Partie B

2. Démontrer la nature du triangle ORS.

Production demandée

– Visualiser à l'écran la figure réalisée avec un logiciel de géométrie dynamique.
– Conjecturer la nature du lieu du point G.
– Démontrer la nature du triangle ORS.

Étude d'une figure de l'espace

Énoncé

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points $A(1,0,2)$, $B(-1,1,1)$, $C(1,1,3)$, $D(3,0,4)$ et $E(5,2,2)$.
Sur une figure, réalisée avec un logiciel de géométrie, placer les points A, B, C, D et E.

Partie A

Pour chacune des quatre questions suivantes, on propose trois affirmations dont une seule est vraie. Indiquer quelles affirmations sont vraies et expliquer comment vous avez utilisé les possibilités du logiciel pour parvenir à ces réponses. Aucune démonstration n'est pour l'instant demandée.

1. (a) Les points A, B, C sont alignés.
   (b) Le triangle BDE est rectangle.
   (c) Le triangle BDE est isocèle.
2. (a) Le point D est le barycentre du système de points pondérés $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$.
   (b) Les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
   (c) Le point D est le barycentre du système de points pondérés $\{(A,1),(B,-1),(C,1)\}$.

Appeler l'examinateur. Lui montrer la figure et les réponses choisies.

3. (a) Le projeté orthogonal du point B sur le plan (ADE) est le point D.
   (b) La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).
   (c) La droite (AD) est orthogonale au plan (BDE).
4. Soit Σ la sphère de centre E et de rayon $2\sqrt{3}$.
   (a) La sphère Σ est tangente au plan (ABC).
   (b) La sphère Σ passe par le point A.
   (c) L'intersection de la sphère Σ et du plan (ABC) est l'ensemble vide.

Appeler l'examinateur. Lui montrer la figure et les réponses choisies.
Vérifier les procédures de contrôle.

Partie B

5. Démontrer les réponses que vous avez choisies aux questions 1. et 2..

Production demandée

– Visualiser la figure à l'écran.
– Pour chaque question, indiquer la réponse choisie.
– Sur la copie, décrire les démarches mises en oeuvre avec le logiciel.

Étude de deux suites définies par des relations de récurrence

Énoncé

On considère les deux suites d'entiers u et v définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = v_n + n - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = -1, \\ v_{n+1} = -u_n + 2v_n + n \end{cases}$$

Partie A

1. Donner les 20 premiers termes de chacune de ces suites fournis par le logiciel choisi ou la calculatrice.

Appeler l'examinateur pour vérification

2. n étant donné ($n \geqslant 1$), on peut calculer la valeur de u_n et v_n si on connait la valeur de u_{n-1} et v_{n-1}. On voudrait à présent pouvoir calculer, pour n'importe quelle valeur de l'entier naturel n, la valeur de u_n et v_n sans pour autant connaitre autre chose que la valeur de n. Pour cela il faudrait disposer de formules. Le but de cette question est ainsi de déterminer des formules plausibles pour u_n et v_n en fonction de n. Plusieurs approches complémentaires (et non incompatibles) sont proposées :
   - Utilisation de représentations graphiques de u_n (respectivement, v_n) en fonction de n,
   - Utilisation d'une représentation graphique du nuage de points ayant (u_n, v_n) comme coordonnées,
   - Utilisation de suites auxiliaires.

Appeler l'examinateur pour lui exposer la méthode de recherche suivie et lui proposer des formules possibles.

Partie B

3. Justifier le fait que la suite (x_n) définie par $x_n = v_n - u_n$ est une suite arithmétique, et en préciser la raison.
4. Justifier la formule trouvée pour la suite (v_n).

Production demandée

- Réalisation du calcul donnant les 20 premiers termes des suites u, v.
- Démonstration attendue à la question 4.

Nombres complexes et géométrie

Énoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$, et peut être ainsi assimilé à l'ensemble des nombres complexes.

Pour tout $a \in \mathbf{R}$, on définit le nombre complexe $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$. On définit les points M, N et P par leurs affixes respectives z, z^2 et z^3. On définit alors le point Q d'affixe $z + z^2 + z^3$.

Partie A

1. On considère dans cette question que le réel a est fixé. Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

   Appeler l'examinateur pour contrôle de la transformation choisie et de la figure.

2. Quelle conjecture peut-on formuler sur les points O, N et Q lorsque le réel a varie ?

   Appeler l'examinateur pour vérification de la figure construite.

3. On s'intéresse enfin à l'évolution de la distance OQ lorsque a varie. Que peut-on observer concernant la (ou une) position de M qui donne la distance OQ maximale ? minimale ?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les éventuelles observations
   et la méthode prévue pour la démonstration attendue à la question suivante.

Partie B

4. Démontrer la conjecture émise en 2).
5. Justifier soit le maximum soit le minimum de OQ.

Production demandée

- Figure réalisée avec le logiciel de géométrie dynamique.
- Démonstration de la conjecture.
- Obtention du maximum ou du minimum de la distance OQ.

Étude de deux suites

Énoncé

On considère l'algorithme ci-après qui, à partir d'un entier naturel non nul N, en calcule un autre, noté P.

– Initialiser l'entier P à 1 ;
– Pour i allant de 1 à N :
    Remplacer P par $P \times i$;
    Fin pour ;
– Afficher P.

1. (a) À l'aide d'un tableur, de votre calculatrice ou de tout autre logiciel, mettre en œuvre l'algorithme.

   Appeler l'examinateur pour valider votre algorithme.

   (b) Calculer au moyen de cet algorithme les valeurs de P obtenues pour les entiers N entre 1 et 20.

   (c) Quelle formule permet de relier l'entier P calculé à l'entier N choisi pour ce calcul ?

2. On considère les suites (u_n), (v_n) et (e_n) définies pour $n \geqslant 2$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!} \quad \text{et} \quad e_n = v_n - u_n$$

   À l'aide de l'outil de votre choix (numérique ou graphique), émettre une conjecture à propos :

   (a) du sens de variation des deux suites (u_n) et (v_n) ;

   (b) de la convergence de la suite (e_n) ;

   (c) de la nature des suites (u_n) et (v_n).

   Appeler l'examinateur pour valider vos conjectures.

3. (a) En admettant la monotonie de la suite (v_n), démontrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite L et donner un encadrement de L à 10^{-8} près.

   (b) Quelle est à votre avis la valeur exacte de L ?

Production demandée

– Implémentation et analyse de l'algorithme ;
– Exposé oral des conjectures relatives au comportement et à la nature des trois suites (u_n), (v_n) et (e_n) ;
– Une démonstration de convergence.

Intersection de deux courbes

Énoncé

Soit m un réel donné. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{mx^2-x+m} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

On note C_1 et C_2 les courbes représentatives de f et g dans un même repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.
On se propose d'étudier la position relative des courbes C_1 et C_2 selon les valeurs du réel m.

Partie A

1. Le réel m étant donné, tracer les courbes C_1 et C_2 à l'aide d'un logiciel.

   Appeler l'examinateur pour une vérification du graphique réalisé.

2. Utiliser le(s) graphique(s) obtenu(s) pour répondre aux questions suivantes.
   (a) Conjecturer le nombre de points communs aux courbes C_1 et C_2 selon les valeurs de m.
   (b) Quelle propriété indépendante de m les points communs à ces deux courbes semblent-ils présenter ?
   (c) Existe-t-il une ou des valeur(s) de m pour lesquelles les courbes C_1 et C_2 admettent une même tangente en un point commun ?

   Appeler l'examinateur pour une vérification des réponses trouvées.

Partie B

3. (a) Démontrer la propriété observée en 1. c) concernant les points communs aux courbes C_1 et C_2.
   (b) Déterminer le nombre de points communs aux courbes C_1 et C_2 selon les valeurs du réel m.
   (c) Déterminer les valeurs de m telles que les courbes C_1 et C_2 admettent une tangente commune en un point commun.

Production demandée

– Visualiser à l'écran les courbes des fonctions f et g.
– Faire les démonstrations demandées dans la question 3.

Problème d'optimisation

Énoncé

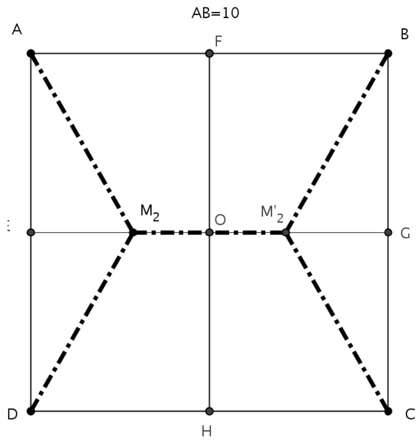
Quatre hameaux A, B, C et D sont situés aux sommets d'un carré de 10 kilomètres de côté. On se propose de relier ces quatre hameaux par un réseau routier le plus court possible.

Partie A

1. Un première idée est de réaliser un chemin avec un seul croisement en un point M_1 situé à l'intérieur du carré.
   (a) Où à votre avis faut-il placer le point de croisement ?
   (b) Utilisez un logiciel de géométrie dynamique pour vérifier votre conjecture. Vous pourrez placer un «point libre» M_1 et faire afficher la distance $M_1A + M_1B + M_1C + M_1D$.

Appelez l'examinateur pour une vérification de la construction et des réponses trouvées.

2. Une deuxième idée est d'utiliser deux croisements comme le suggère la figure ci-dessous dans laquelle (EG) et (FH) sont des axes de symétrie du carré.



   (a) Placez un «point libre» M_2 sur le segment $[EO]$ et un point M_2' symétrique de M_2 par rapport à O puis faites afficher la longueur du trajet. Pensez-vous qu'il y a un minimum ? Si oui, donnez en une valeur approchée.
   (b) Comparez à la valeur trouvée à la question précédente.

Appelez l'examinateur pour une vérification de la construction et des réponses trouvées.

Partie B

3. (a) Démontrez que le point obtenu à la première question réalise bien le minimum (pour les trajets à un croisement). Si O est le point que vous avez trouvé, montrez que si M est un autre point, alors $MA + MB + MC + MD > OA + OB + OC + OD$.
   (b) On cherche la valeur exacte du minimum obtenu à la seconde question. Après avoir choisi un paramètre adapté, vous exprimerez la longueur du chemin en fonction de ce paramètre puis déduirez le minimum.

Production demandée

– Obtention à l'écran des figures.
– Réponse argumentée à la question 3.(a).

Aire maximale d'un triangle

Énoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormé et (C) est la parabole d'équation $y = x^2$.

Sur (C), on considère le point fixe A d'abscisse a, réel strictement positif, et un point M dont l'abscisse x appartient à l'intervalle $[0, a]$.

On cherche la position de M pour laquelle l'aire du triangle OMA est maximale.

Partie A

1. On fixe $a = 3$.

   Avec un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer la position de M qui rend l'aire du triangle OAM maximale.

   Appeler l'examinateur pour qu'il vérifie la construction ou en cas de blocage

2. La conjecture est-elle confirmée pour d'autres valeurs de a ?

   Appeler l'examinateur pour lui proposer la conjecture

Partie B

3. Soit f la fonction qui, à tout x de $[0, a]$, associe l'aire du triangle OMA.

   (a) Déterminer l'expression de $f(x)$.

   Appeler l'examinateur pour lui proposer l'expression trouvée.

   (b) Étudier les variations de f et en déduire la position de M pour laquelle l'aire est maximale ainsi que la valeur de l'aire maximale.

Production demandée

– la figure dynamique ;
– validation de la conjecture.

Recherche d'un lieu géométrique

Énoncé

Dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère la droite d d'équation $y = -2$ et le point A de coordonnées $(0\,;2)$.
Pour tout point M de la droite d, on considère le point P, point d'intersection de la perpendiculaire à d en M et de la médiatrice du segment $[AM]$.
Le but de l'exercice est de déterminer le lieu du point P quand le point M décrit la droite d.

Partie A

1. Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

   Appeler l'examinateur pour vérification de la construction.

2. Visualiser le lieu du point P lorsque le point M décrit la droite d. Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de ce lieu ?

   Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

3. On considère le point Q, milieu du segment $[A, P]$. Que peut-on dire du lieu du point Q lorsque M varie comme précédemment ?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter le lieu de Q et les observations associées et lui indiquer la méthode prévue pour le calcul qui suit.

Partie B

4. Déterminer par le calcul le lieu du point P lorsque M décrit la droite (d).

Production demandée

– La figure réalisée avec un logiciel de géométrie dynamique.
– La réponse argumentée à la question 4.

Optimisation en géométrie plane

Énoncé

Dans un repère orthonormal du plan, on considère la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $x \mapsto e^x$ et la droite D d'équation $y = 2x - 3$.

On se propose de déterminer, s'il existe, un point M de $\mathscr{C}$ tel que la distance de M à la droite D soit minimale.

Partie A

1. Utiliser un logiciel de géométrie pour construire la droite D et la courbe $\mathscr{C}$.
2. Placer un point mobile M sur $\mathscr{C}$ et construire le point N image de M par la projection orthogonale sur D.
3. Conjecturer, au moyen du logiciel, l'abscisse du point M_0 de $\mathscr{C}$ dont la distance à D est minimale.
   Proposer une valeur approchée de cette distance minimale.
   Conjecturer une propriété de la tangente en M_0 à $\mathscr{C}$.

Appeler l'examinateur pour lui présenter les constructions, la valeur approchée et les conjectures.

Partie B

4. Élaborer une méthode permettant de démontrer ces conjectures.

Appeler l'examinateur pour lui présenter la méthode.

5. Calculer les coordonnées de M_0 et sa distance à D.

Production demandée

- Construction de $\mathscr{C}$, D, M et N au moyen du logiciel de géométrie.
- Conjectures relatives à l'abscisse de M_0 et à la tangente en M_0 à $\mathscr{C}$.
- Proposition d'une valeur approchée de la distance de M_0 à D.
- Calcul des coordonnées de M_0 et de sa distance à D.

Lieu géométrique d'un barycentre dans l'espace

Énoncé

On considère un tétraèdre ABCD ; on note I le milieu du segment [AB], J celui de [CD] et L le point tel que ICJL soit un parallélogramme.

On se donne un nombre réel non nul m et on définit le point G comme barycentre du système de points pondérés

$$\left\{ (\mathrm{A};1), (\mathrm{B};1), (\mathrm{C};m-2), (\mathrm{D};m) \right\}.$$

Le but de l'exercice est de déterminer le lieu du point G quand m décrit l'ensemble des réels non nuls.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique représenter la figure.

   Appeler l'examinateur afin de vérifier la figure obtenue à l'écran.

2. À l'aide du logiciel, répondre aux questions suivantes :

   (a) Où semble se situer le point G lorsque $m = 2$?

   (b) Existe-t-il une valeur de m pour laquelle les points G et L sont confondus ?

   (c) Visualiser le lieu du point G lorsque m décrit l'ensemble des réels non nuls. Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de ce lieu ?

   Appeler l'examinateur pour vérifier les réponses et la visualisation du lieu.

   (d) Quel rapport y a-t-il entre les longueurs JL et JG ? Quelle conjecture peut-on énoncer concernant les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{JL}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{JG}}$?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter la conjecture.

Partie B

3. (a) Valider ou invalider la conjecture émise concernant les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{JL}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{JG}}$ à la question 1.(d), et rectifier s'il y a lieu cette conjecture.

   (b) En déduire l'ensemble des points G lorsque m décrit l'ensemble des réels non nuls.

Production demandée

- La visualisation à l'écran du lieu du point G.
- Réponses argumentées pour les questions 3.(a) et (b).

Simulation d'un tirage de boules dans des urnes

Énoncé

On dispose de deux urnes U et V contenant des boules indiscernables au toucher. L'urne U contient dix boules numérotées de 1 à 10. L'urne V contient dix boules numérotées de 0 à 9. Un jeu se déroule de la manière suivante : le joueur verse une mise initiale de 100 jetons, puis il tire au hasard une boule dans l'urne U et une boule dans l'urne V de façon indépendante. Chaque boule portant un numéro inférieur ou égal à 4 rapporte a jetons où a est un naturel non nul, le tirage d'une autre boule ne rapporte ni ne fait perdre aucun jeton. On regarde à l'issue de ce jeu le gain algébrique (gain ou perte) compté en jetons.

Partie A

1. On simule 1000 exécutions du jeu sur un tableur. On fixe dans un premier temps $a = 150$.
   (a) Réaliser une feuille de calcul sur le modèle suivant :

	A	B	C	D
1	Rang du tirage	Numéro de la boule tirée dans l'urne U	Numéro de la boule tirée dans l'urne V	Gain algébrique
2	1			
3	2			
⋮	⋮			
1001	1000			

Appeler l'examinateur pour vérifier la feuille de calcul.

   (b) Déterminer la moyenne des gains obtenus lors de cette simulation.
   (c) À l'aide d'autres simulations, conjecturer la valeur vers laquelle semble tendre la moyenne des gains obtenus.

Appeler l'examinateur pour vérifier la démarche et la conjecture.

2. On souhaite faire varier la valeur de a.
   (a) Adapter la feuille de calcul pour obtenir des simulations en fonction de a.
   (b) Est-il possible de donner une valeur à a qui paraisse rendre le jeu équitable ?

Appeler l'examinateur pour vérifier la démarche et la conjecture.

Partie B

3. Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique à l'issue d'un tirage.
   (a) Déterminer l'espérance de X en fonction de a.
   (b) Est-il possible de trouver a afin que le jeu soit équitable ?
   (c) Comparer le résultat avec les conjectures obtenues dans la Partie A.

Production demandée

– Visualisation à l'écran de la feuille de calcul.
– Réponses argumentées pour les questions posées en 3.(a), 3.(b) et 3.(c).

Étude d'une situation géométrique avec les nombres complexes

Énoncé

On donne un quadrilatère ABCD.

On construit, à l'extérieur du quadrilatère, les triangles MAB, NBC, PCD et QDA rectangles isocèles en M, N, P et Q.

On note K, L, U et V les milieux respectifs des segments [AC], [BD], [MP] et [NQ].

Partie A

1. Utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour
   (a) obtenir la figure ci-dessus ;

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure.

   (b) formuler une conjecture relative aux vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{NQ}$;
   (c) formuler une conjecture relative au quadrilatère ULVK ;
   (d) examiner ce qui se passe lorsque ABCD est un parallélogramme.

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures.

Partie B

2. Dans le plan complexe, on note a, b, c, d les affixes respectives des points A, B, C et D. Avec l'aide éventuelle d'un logiciel de calcul formel :
   (a) exprimer les affixes m, n, p et q des points M, N, P et Q en fonction de a, b, c et d.
   (b) démontrer la conjecture du 1.(b).

   Appeler l'examinateur pour une vérification des expressions trouvées.

   (c) démontrer la conjecture du 1.(c).

Production demandée

– Figure dynamique demandée à la question 1.(a).
– Exposé de la méthode suivie pour obtenir la validation de l'un des conjectures.

Une propriété des diviseurs de certains entiers

Énoncé

On dit qu'un entier naturel non nul N est *en division harmonique* si le quotient du nombre de diviseurs de N par la somme des inverses des diviseurs de N est un entier (c'est-à-dire, que le nombre des diviseurs est un multiple de la somme des inverses des diviseurs).

Par exemple :

- 6 admet **4** diviseurs qui sont 1 ; 2 ; 3 et 6 ;
- la somme des inverses des diviseurs de 6 vaut : $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\mathbf{2}$;
- le quotient $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}}=2$ est un entier ;
- 6 est donc en division harmonique.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, dire si les nombres 32 et 140 sont en division harmonique.

   Appeler l'examinateur pour vérification.

2. Pour tout entier n non nul on pose $q_n = 2^{n+1}-1$ et $\alpha_n = 2^n q_n$.

   (a) Déterminer à l'aide du logiciel les quatre (ou cinq si possible) premières valeurs de n pour lesquelles q_n est un nombre premier.

   (b) Pour chacune des valeurs trouvées, calculer le nombre de diviseurs de α_n et la somme des inverses des diviseurs de α_n. Que peut-on conjecturer ?

   Appeler l'examinateur pour vérification des valeurs et présentation de la conjecture.

Partie B

3. Soit p un nombre premier.
   Montrer que p n'est pas en division harmonique.
4. On suppose que $q_n = 2^{n+1}-1$ est premier.
   (a) Donner la liste des diviseurs de α_n en fonction de q_n.
   (b) Que peut-on conclure si la somme des inverses des diviseurs de α_n vaut 2 ?
   (c) Montrer que la situation précédente est vérifiée.

Production demandée

– Questions 3 et 4.

Étude d'une suite de nombres complexes

Énoncé

On considère la suite (u_n) de nombres complexes définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \ u_1 = \mathrm{i} \\ u_{2n} = 1 + \mathrm{i}u_n \\ u_{2n+1} = \mathrm{i} - \mathrm{i}.u_n \end{cases}$$

Partie A

1. Définir cette suite en utilisant un logiciel de calcul numérique ou formel.

   Appeler l'examinateur pour lui présenter le travail réalisé.

2. Obtenir le calcul des trente premiers termes de la suite. Quel ensemble de nombres complexes semble parcourir cette suite ?

Partie B

3. *À partir de maintenant, on note* $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

   Obtenir les valeurs de S_{30}, S_{31}, S_{100}, S_{101}, S_{500}, S_{501}, S_{2008} et S_{2009}.
   Quelles conjectures peut-on émettre ?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter le travail réalisé.

Partie B

4. Vérifier que $S_{2n+1} = u_0 + u_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (u_{2k} + u_{2k+1})$.

   Calculer $u_{2k} + u_{2k+1}$ pour $k \in \mathbf{N}$, et en déduire l'expression de S_{2n+1} en fonction de n.
5. On suppose maintenant que $S_{2n} = n + \mathrm{i}n$, pour $n \in \mathbf{N}$.
   (a) En calculant $S_{2n+1} - S_{2n}$, montrer que :
   $u_{2n+1} = \mathrm{i}$ pour tout entier n.

   (b) Que peut-on en conclure sur la conjecture formulée au début de cette question ?
6. En utilisant éventuellement à nouveau le logiciel, examiner ce qu'on peut dire des entiers n tels que $S_{2n} = n + \mathrm{i}n$.

Production demandée

– Définition de la suite (u_n) à partir d'un logiciel de calcul formel.
– Calcul de plusieurs termes et sommes de termes de cette suite .
– Réponses argumentées pour les questions **4.** et **5.**.

Équation avec un paramètre

Énoncé

Dans cet exercice, on s'intéresse aux solutions positives de l'équation (E) : $\dfrac{x}{(2\ln x+1)^2} = mx$, où m est un paramètre réel.

Partie A

1. (a) En utilisant un logiciel adapté, tracer la courbe (C) représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{(2\ln x+1)^2}$ et la droite (d) d'équation $y = mx$.
Conjecturer alors le nombre de solutions de l'équation (E).

Appeler l'examinateur pour lui montrer le graphique et répondre à la question posée.

(b) Dans cette question, m est un entier naturel non nul. On note a_m la plus petite des solutions de l'équation (E) et b_m, la plus grande. On s'intéresse aux suites (a_m) et (b_m).
Conjecturer, à l'aide du logiciel, les variations et la convergence de ces deux suites.
Que peut-on dire de ces deux suites ?

Appeler l'examinateur pour lui exposer les conjectures faites et la démarche envisagée pour les questions à venir.

Partie B

2. (a) Calculer les expressions de a_m et b_m, en fonction de m.
(b) Justifier le sens de variation de la suite (b_m).
(c) Calculer la limite de cette suite.

Production demandée

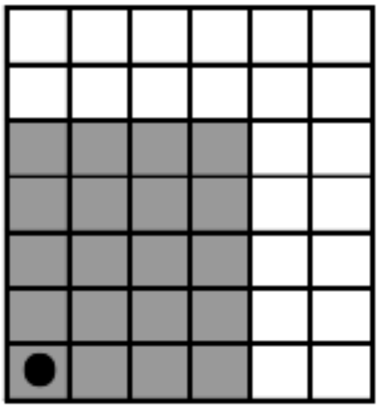
- Visualisation à l'écran des représentations graphiques.
- Conjectures demandées.
- Réponse écrite et orale à la question 2.

Déplacement aléatoire sur un damier

Énoncé

Tous les résultats seront donnés avec une précision de 10^{-3}.

Un pion est situé en bas à gauche d'un damier. Le jeu consiste à lancer un dé à six faces parfaitement équilibré ; si on obtient un multiple de trois, le pion se déplace d'une case vers la droite, sinon il se déplace d'une case vers le haut. Une partie consiste à lancer le dé six fois de suite. Le joueur gagne si à l'issue des six lancers, le pion reste dans la zone grisée.



Partie A

1. À l'aide d'un tableur, simuler 100 parties.

   Appeler l'examinateur pour vérification du tableau.

2. Augmenter le nombre de parties et en tirer l'énoncé d'une conjecture relative à la probabilité que le joueur gagne.

   Appeler l'examinateur pour lui présenter la conjecture.

Partie B

3. Calculer cette probabilité. Est-ce cohérent avec la conjecture de la question précédente ?
4. Que donnerait le problème analogue à celui-ci, mais en dimension 3 ?

Production demandée

– La feuille de calcul simulant une partie de jeu.
– La démonstration de la probabilité théorique de gagner.

Divisibilité par 2, 3, 7 et 13 de certains entiers naturels

Énoncé

Pour tout entier naturel n non nul, on considère le nombre U_n défini par :

$$U_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}.$$

On cherche à déterminer si ce nombre peut être divisible par l'un ou plusieurs des nombres premiers suivants : 2 ; 3 ; 7 et 13.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, calculer $U_1, U_2, \cdots, U_{30}$.
2. Déterminer les listes des restes de la division de U_n par 2 ; par 3 ; par 7 et par 13.

   (a) Quelles conjectures peut-on en tirer ?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures trouvées.

   (b) À quelle(s) condition(s) sur n, le nombre U_n semble-t-il être divisible par 7×13 ? par $2 \times 7 \times 13$?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures trouvées.

Partie B

3. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, U_n est divisible par 7 si, et seulement si, 7 divise $3^n - 1$.

   Appeler l'examinateur pour vérification

4. À l'aide de la question précédente, démontrer la conjecture émise pour 7.
5. Dans le cas où U_n est divisible par 7, U_n est-il divisible par 7×13 ? par $2 \times 7 \times 13$?

Production demandée

– Les différentes conjectures.
– La démonstration de la question 4 .

Nombres premiers et nombres composés

Énoncé

On sait qu'en vertu du théorème de Fermat, tout nombre entier premier impair p divise le nombre $2^{p-1}-1$. On appelle nombre pseudo-premier tout nombre entier n strictement supérieur à 1, qui ***n'est pas premier*** et qui pourtant divise le nombre $2^{n-1}-1$. Le but de l'exercice est de démontrer qu'il existe une infinité de nombres pseudo-premiers.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice adaptés, écrire une procédure ou une fonction déterminant si un nombre entier donné est pseudo-premier.

   Appeler l'examinateur, lui indiquer la méthode utilisée et lui montrer les résultat obtenus sur un jeu de données.

2. Déterminer les nombres pseudo-premiers inférieurs à 1000 et en déduire l'existence d'au moins un nombre pseudo-premier.

   Appeler l'examinateur, lui indiquer la méthode utilisée et lui donner le résultat trouvé.

3. Pour les nombres n pseudo-premiers trouvés à la question précédente, que peut-on dire des nombres 2^n-1 ?

Partie B

4. Démontrer qu'un nombre pseudo-premier est impair.

   Appeler l'examinateur, lui exposer la démonstration
   et lui indiquer la méthode choisie pour la démonstration
   ainsi que la stratégie prévue pour les réponses aux questions suivantes.

5. On sait (somme des premiers termes d'une suite géométrique) que si a est un nombre réel et n un entier ($n>1$), $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)$. En déduire que si n est un nombre pseudo-premier, il en est de même de 2^n-1.
6. Démontrer qu'il y a une infinité de nombres pseudo-premiers.

Production demandée

– Explications orales et à l'écran pour les questions 1. et 2.
– Réponse écrite aux questions 3. et 4. et écrite ou orale à la question 5. .

Suites et fonctions

Énoncé

Soit n un entier naturel, $n \geqslant 1$. On considère les fonctions f_n définies sur $[0;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}}{n} - 1 + x\mathrm{e}^{1-x}$$

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, conjecturer, suivant les valeurs de n :
   (a) les variations de f_n.
   (b) le nombre de solutions de l'équation $f_n(x) = 0$.
2. On note α_n et β_n les deux solutions, lorsqu'elles existent, de l'équation $f_n(x) = 0$ telles que $\alpha_n < \beta_n$.
   (a) Conjecturer, pour tout $x \geqslant 0$, une inégalité entre $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.
   (b) Quelle conjecture peut-on alors formuler à propos du sens de variation des suites (α_n) et (β_n), et de leur convergence éventuelle ?
   (c) Quelle propriété semblent vérifier les suites (α_n) et (β_n) ?

Appeler l'examinateur pour lui montrer le travail réalisé sur le logiciel et pour vérifier les conjectures formulées.

Partie B

3. (a) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet, à partir d'une certaine valeur de n, deux solutions distinctes α_n et β_n dans des intervalles que l'on précisera.

Appeler l'examinateur pour vérification.

   (b) Démontrer que les suites (α_n) et (β_n) sont de monotonies contraires.

Appeler l'examinateur pour vérification.

   (c) Que peut-on en déduire ?

Appeler l'examinateur pour vérification.

Production demandée

– Les différentes conjectures.
– Les démonstrations détaillées des questions 3 (a) et 3 (b).

Section plane d'un tétraèdre

Énoncé

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(-1, 0, 2)$, $B(3, 2, -4)$, $C(1, -4, 2)$ et $D(5, -2, 4)$.

Soit I et K les milieux respectifs des segments [AB] et [CD], et soit J le point tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

On se propose d'étudier la section du tétraèdre ABCD par le plan (IJK).

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, représenter le tétraèdre ABCD et placer les points I, J et K.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure réalisée.

2. (a) En utilisant le logiciel, vérifier que les points I, J et K déterminent un plan et afficher une équation cartésienne de ce plan.

   (b) Tracer la section du tétraèdre ABCD par le plan (IJK).

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure réalisée.

3. (a) Soit L le point d'intersection de la droite (AD) et du plan (IJK). Construire le point L et afficher les coordonnées de ce point.

   (b) Conjecturer la valeur du réel q tel que $\overrightarrow{AL} = q\overrightarrow{AD}$.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et des affichages.

4. On admet que les points I, J et K déterminent un plan P.

   (a) Montrer que l'équation proposée par le logiciel est une équation du plan P.

   (b) Déterminer les coordonnées du point L d'intersection de la droite (AD) et du plan (IJK), et préciser la valeur du réel q tel que $\overrightarrow{AL} = q\overrightarrow{AD}$.

Production demandée

– Réalisation de la figure.
– Réponse argumentée à la question 4.

Étude d'un ensemble de points du plan construit à l'aide de deux suites

Énoncé

On fixe un paramètre réel a (différentes valeurs seront essayées par la suite). Deux suites (x_n) et (y_n) sont alors définies par les conditions initiales $x_0 = 20$, $y_0 = 0$ et par la récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \quad \begin{cases} x_{n+1} = a.x_n - y_n \\ y_{n+1} = x_n + a.y_n \end{cases}$$

Dans un repère orthonormé, on considère le point M_n de coordonnées (x_n, y_n). L'objectif est d'observer et d'étudier le nuage des points M_n obtenus, à l'aide d'un logiciel permettant des représentations analytiques.

Partie A

1. On choisit, dans cette question, de prendre $a = 1$.

   (a) Placer dans un repère orthonormé adapté les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6.

   Appeler l'examinateur pour qu'il vérifie la figure.

   (b) Quelle même transformation semble envoyer M_0, M_1, M_2 M_3, M_4 en M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 respectivement ?

   (c) Vérifier la conjecture à l'aide du logiciel pour les points déjà calculés.

   Appeler l'examinateur valider la conjecture ainsi que sa vérification.

2. On envisage maintenant de faire varier a. En essayant successivement les valeurs $a = 0$, $a = -1$, $a = \pm 1/\sqrt{3}$, $a = \pm 0,75$, formuler des observations relatives à la transformation qui envoie M_n sur M_{n+1}.

   Appeler l'examinateur pour lui proposer les observations.

Partie B

3. En déterminant l'affixe du point M_{n+1} en fonction de celle de M_n, expliquer certaines des observations précédentes.

Production demandée

– Réaliser la figure demandée à l'aide d'un logiciel de géométrie.
– Justification des observations faites à la question 3).

Épreuve pratique de mathématiques

Été 2009

Fiches-professeur

Étude d'un lieu géométrique

Énoncé

Dans le plan muni d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O. Soit P un point du segment [BC]. La droite perpendiculaire à (AP) passant par A coupe (CD) en Q. On note M le milieu du segment [PQ].

Partie A

1. En utilisant un logiciel de géométrie, construire une figure traduisant l'énoncé.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la construction.

2. Visualiser, à l'aide du logiciel, le lieu géométrique du point M lorsque le point P décrit le segment [BC].
   Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de ce lieu géométrique ?

   Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

☞ *Une réponse du type «droite» (BD) ou «demi-droite» est évidemment incorrecte, mais on pourra laisser l'élève poursuivre et voir s'il corrige de lui-même par la suite (ce qui serait très favorable).*

Partie B

3. (a) À l'aide d'une isométrie bien choisie, déterminer la nature du triangle APQ.
   (b) Démontrer que M est l'image de P par une similitude directe s de centre A dont on précisera le rapport et l'angle.
   (c) En déduire le lieu géométrique du point M.

Production demandée

- La figure réalisée avec le logiciel.
- Les réponses à la question 3.

Compétences évaluées

- Construire une figure avec un logiciel.
- Visualiser un lieu géométrique.
- Utiliser une transformation pour démontrer qu'un triangle est rectangle isocèle et exploiter cette configuration.
- Déterminer l'image d'un segment par une transformation du plan.

Étude d'un lieu géométrique

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable de représenter la situation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. Il ou elle tire profit des indications éventuellement données à l'oral.	
L'élève est capable d'expérimenter, de faire des essais pour émettre et contrôler une conjecture sur la nature du lieu de P. *L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
Suite à un éventuel questionnement oral, l'élève est capable d'affiner ses explorations en étudiant la figure et les transformations pouvant être utilisées dans la démonstration.	
L'élève montre un certain nombre de connaissances et de savoir-faire mathématiques sur les similitudes.	
L'élève propose une résolution correcte de l'exercice en tirant profit de ses observations.	

Remarques complémentaires :

Encadrement d'une intégrale

Énoncé

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $f(x) = x^2e^{1-x^2}$.

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ On se propose de déterminer un encadrement de l'intégrale

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx\ .$$

Partie A

1. Visualiser la courbe $\mathscr{C}$ sur l'écran et conjecturer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, 1]$.

   Donner une interprétation géométrique de l'intégrale I.

   Appeler l'examinateur pour la vérification du tracé et la validation de la conjecture.

   ☞ *Le tracé de courbe demandé pourrait être réalisé avec une calculatrice ou différents logiciels mais tant qu'à faire autant le réaliser dans le tableur lui-même : il suffit de «tabuler» la fonction avec un «pas» de* $0,01$ *puis de faire apparaitre un «graphique X-Y».*

2. Soit n un entier naturel non nul. On pose $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

   (a) Réaliser à l'aide d'un tableur (ou de tout logiciel adapté, voire d'une bonne calculatrice) un tableau de calcul permettant de calculer S_n et T_n pour $n = 100$.

   ☞ *L'élève devra commencer par «tabuler» la fonction* f *sur* $[0; 1]$ *avec un pas de* $0,01$ *(ce travail préliminaire a peut-être été réalisé à la première question pour le tracé de* f*). Cela fait, il n'y a guère plus qu'un usage de la fonction* `SOMME()`*, mais on s'assurera qu'aucun décalage d'indice d'une unité n'a eu lieu.*

   (b) On admet que pour tout entier naturel non nul n :

   $$S_n \leqslant I \leqslant T_n.$$

   En déduire un encadrement de I et l'amplitude de cet encadrement.

   Appeler l'examinateur pour la vérification des calculs et des résultats.

Partie B

3. (a) Justifier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, 1]$.

   (b) Calculer $T_n - S_n$ et justifier l'amplitude de l'encadrement trouvé précédemment.

   (c) Comment pourrait-on faire pour obtenir une approximation de I à $0,0005$ près ?

Production demandée

– La courbe tracée à l'écran.
– La visualisation à l'écran de la feuille de calcul réalisée à la question 2.
– Les démonstrations demandées à la question 3.

Compétences évaluées

– Réaliser une feuille de calcul adaptée à la situation.
– Interpréter une intégrale en terme d'aire.
– Encadrer une aire par la méthode des rectangles.
– Déterminer une majoration de l'erreur commise.

Encadrement d'une intégrale

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

- *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
- *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
- *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève comprend l'énoncé et est capable de représenter la courbe représentative de la fonction.	
L'élève utilise de façon pertinente, avec une aide éventuelle, la calculatrice ou le tableur pour bâtir le tableau de valeurs de la fonction et d'en tirer les valeurs attendues. *Il ou elle est capable d'expérimenter, de faire des essais, et tire profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
Suite à un éventuel questionnement oral, l'élève est capable de modifier ses approches ou de développer une analyse critique de sa démarche.	
L'élève fait preuve d'un certain nombre de connaissances, de savoir-faire mathématiques sur le sujet : notion d'intégrale, encadrement par la méthode des rectangles, utilisation des intervalles...	
Il ou elle présente une solution satisfaisante en argumentant correctement sa démarche.	

Remarques complémentaires :

Étude d'un phénomène biologique

Énoncé

Une expérience portant sur l'étude de la croissance de bactéries (escherichia coli), durant deux heures dans un milieu liquide minimum glucosé, donne le tableau suivant (où t est la durée exprimée en heures et $D(t)$ la densité de cellules en fonction de la durée) :

t	0	0,1	0,3	0,57	0,6	0,7	0,9	1,2	1,47	1,72	1,95
$D(t)$	10,2	11,2	13,5	17,2	17,7	19,5	23,5	30,5	39	49,2	61

1. À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, représenter le nuage de points correspondant au tableau ci-dessus.

Appeler le professeur pour vérifier le graphique.

☞ *Vérifier le graphique présenté.*
Si un élève utilise la calculatrice, l'aider pour le réglage de la fenêtre afin que le nuage soit bien représenté et ne demander qu'une copie rapide de l'écran.

On recherche désormais une fonction qui approche la densité de population en fonction de la durée. La détermination d'une telle fonction passe par la recherche de quantités fixes.

2. Dans une telle situation, différentes hypothèses sont envisagées concernant l'accroissement de la densité ΔD. Est-elle proportionnelle :
   - à l'accroissement de la durée Δt, ce qui signifie que $\dfrac{\Delta D}{\Delta t}$ est constant ?
   - à D, ce qui signifie que $\dfrac{\Delta D}{D}$ est constant ?
   - à D et Δt, ce qui signifie que $\dfrac{\Delta D}{\Delta t \times D}$ est constant ?

   À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, vérifier que la troisième hypothèse est la mieux adaptée aux données.

Appeler le professeur pour vérifier le tableau proposé.

☞ *Vérifier le tableau proposé.*
Après un temps laissé à la réflexion, guider un élève qui ne voit pas comment présenter les données dans un tableau. La signification du symbole Δ peut faire obstacle, il faudra la redonner au besoin.
Guider un élève qui ne sait pas remplir la ligne Δt.

3. (a) Expliquer pourquoi la relation $\dfrac{\Delta D}{\Delta t \times D} = k$, où k est une constante, conduit à considérer que la densité peut être représentée par une fonction dérivable f qui vérifie : $f'(t) = k.f(t)$.

☞ *Conseiller à un élève qui ne trouve pas de passer la question, la réponse étant donnée.*

(b) Déterminer toutes les fonctions f qui vérifient $f'(t) = k.f(t)$.

(c) Compte tenu des données dont on dispose, quelle formule peut-on proposer pour la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$?

(d) Représenter, à l'aide d'un tableur ou de la calculatrice, cette fonction f et le nuage de points initial sur un même graphique.

> ☞ *Pour un élève qui utilise la calculatrice, ne demander qu'une copie rapide de l'écran.*

(e) Si le temps le permet : quel aurait été l'avantage d'introduire la quantité $d = \ln(\mathrm{D})$?

> ☞ *On attend ici une représentation graphique faisant apparaitre des points quasiment alignés, ou bien la transformation du modèle obtenu précédemment en une équation de droite ; toute notion de droite de régression est ici exclue (hors-programme).*

Production demandée

- Tableau de valeurs présentant t, $\mathrm{D}(t)$, Δt, $\dfrac{\Delta \mathrm{D}}{\Delta t}$, $\dfrac{\Delta \mathrm{D}}{\mathrm{D}}$, $\dfrac{\Delta \mathrm{D}}{\Delta t \times \mathrm{D}}$;
- vérification simple par comparaison ;
- réponses argumentées pour les trois premières questions de la question 3 ;
- aperçu, recopie ou impression d'écran de la courbe demandée.

Compétences évaluées

- Utiliser un tableur, un grapheur ou une calculatrice ;
- Modéliser une situation par une équation différentielle ;
- Résoudre une équation différentielle avec condition initiale.

Étude d'un phénomène biologique

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève comprend l'énoncé et est capable de représenter les données initiales sous forme d'un tableau correctement organisé.	
L'élève utilise de façon pertinente, avec une aide éventuelle, la calculatrice ou le tableur pour bâtir le tableau de valeurs et représenter graphiquement les données.	
Il ou elle est capable d'expérimenter, de faire des essais, et tire profit des indications éventuellement données à l'oral.	
Suite à un éventuel questionnement oral, l'élève est capable de modifier ses approches ou de développer une analyse critique de sa démarche.	
L'élève fait preuve d'un certain nombre de connaissances, de savoir-faire mathématiques sur le sujet : dérivée comme limite de taux d'accroissements, équation différentielle, fonctions exponentielle et logarithme, etc.	
Il ou elle présente une solution satisfaisante en argumentant correctement sa démarche et en effectuant un retour critique sur ses résultats.	

Remarques complémentaires :

Étude d'une configuration plane

Énoncé

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts O et P et la droite d passant par P et perpendiculaire à la droite (OP). Soit M un point variable appartenant à la droite d. On définit le point Q, quatrième sommet du rectangle OPMQ, puis les points R et S tels que les triangles MPR et MSQ soient équilatéraux, de sens direct.

Partie A

1. (a) En utilisant un logiciel de géométrie dynamique, représenter la situation proposée.

   ☞ *Pour la construction des points* R *et* S*, il faut s'assurer que l'élève pense aux rotations afin d'assurer le sens direct.*

   (b) Lorsque le point M varie sur la droite d, quelle conjecture peut-on émettre à propos de la nature du triangle ORS ?

Appeler le professeur et lui montrer la figure. Lui indiquer la propriété conjecturée et proposer une procédure de contrôle de cette conjecture.

   (c) Sur la figure, construire le point G centre de gravité du triangle ORS.
   Lorsque M se déplace sur la droite d, quelle semble être la nature de la courbe sur laquelle le point G se déplace ?

Appeler le professeur pour faire vérifier la construction. Formuler oralement la conjecture et expliquer comment elle a pu être émise.

   ☞ *Il s'agit simplement de vérifier que l'élève sait afficher la «trace» d'un point.*

Partie B

2. Démontrer la nature du triangle ORS.

   ☞ *Plusieurs démarches sont possibles ici. Si nécessaire, le professeur peut aider l'élève dans ce choix.*

Production demandée

– Visualiser à l'écran la figure réalisée avec un logiciel de géométrie dynamique.
– Conjecturer la nature du lieu du point G.
– Démontrer la nature du triangle ORS.

Compétences évaluées

– Réaliser des constructions géométriques à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
– Réaliser des mesures à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
– Choisir et mettre en œuvre une démarche en géométrie plane.

Étude d'une configuration plane

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable de représenter la situation proposée à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.	
L'élève est capable d'expérimenter, de faire des essais pour émettre et contrôler une conjecture sur la nature du triangle ORS. *Il ou elle tire profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
Suite à un éventuel dialogue avec l'examinateur, l'élève est capable d'adapter, de modifier ou d'enrichir sa démarche.	
L'élève présente et argumente ses résultats à l'oral.	
L'élève fait preuve d'un certain nombre de connaissances et de savoir-faire mathématiques (rotations, angles, etc).	
L'élève présente une résolution correcte de l'exercice en tirant profit de ses observations et en effectuant un retour critique sur ses résultats.	

Remarques complémentaires :

Étude d'une figure de l'espace

Énoncé

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 0, 2)$, $B(-1, 1, 1)$, $C(1, 1, 3)$, $D(3, 0, 4)$ et $E(5, 2, 2)$.
Sur une figure, réalisée avec un logiciel de géométrie, placer les points A, B, C, D et E.

Partie A

Pour chacune des quatre questions suivantes, on propose trois affirmations dont une seule est vraie. Indiquer quelles affirmations sont vraies et expliquer comment vous avez utilisé les possibilités du logiciel pour parvenir à ces réponses. Aucune démonstration n'est pour l'instant demandée.

☞ *Les procédures mises en œuvre par l'élève doivent permettre au professeur de contrôler ses connaissances.*
Si nécessaire, le professeur pourra compléter oralement cette évaluation de connaissances, dans le cadre du questionnaire proposé.

1. (a) Les points A, B, C sont alignés.
   (b) Le triangle BDE est rectangle.
   (c) Le triangle BDE est isocèle.
2. (a) Le point D est le barycentre du système de points pondérés $\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$.
   (b) Les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
   (c) Le point D est le barycentre du système de points pondérés $\{(A, 1), (B, -1), (C, 1)\}$.

Appeler l'examinateur. Lui montrer la figure et les réponses choisies.

☞ *Il s'agit de vérifier que l'élève connait les possibilités du logiciel pour changer de point de vue ou visualiser une section plane de la figure.*
L'élève doit mettre en œuvre des procédures de contrôle (mesure de distances ou d'angles, calcul de coordonnées). Si nécessaire, le professeur le met sur cette voie.

3. (a) Le projeté orthogonal du point B sur le plan (ADE) est le point D.
   (b) La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).
   (c) La droite (AD) est orthogonale au plan (BDE).
4. Soit Σ la sphère de centre E et de rayon $2\sqrt{3}$.
   (a) La sphère Σ est tangente au plan (ABC).
   (b) La sphère Σ passe par le point A.
   (c) L'intersection de la sphère Σ et du plan (ABC) est l'ensemble vide.

Appeler l'examinateur. Lui montrer la figure et les réponses choisies.
Vérifier les procédures de contrôle.

Partie B

5. Démontrer les réponses que vous avez choisies aux questions 1. et 2..

Production demandée

- Visualiser la figure à l'écran.
- Pour chaque question, indiquer la réponse choisie.
- Sur la copie, décrire les démarches mises en oeuvre avec le logiciel.

Compétences évaluées

- Construire une figure de l'espace à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
- Utiliser les potentialités de ce logiciel pour conjecturer des propriétés de la figure.
- Orthogonalité de droites et de plans.
- Barycentre d'un système de points pondérés.
- Intersection d'une sphère et d'un plan.

Étude d'une figure de l'espace

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève comprend l'énoncé et est capable de créer une figure en utilisant un logiciel de géométrie dynamique en dimension 3. Il ou elle tire profit des indications éventuellement données à l'oral.	
Suite à un éventuel questionnement oral, l'élève est capable de modifier ou de faire évoluer son travail pour obtenir de nouveaux résultats.	
L'élève fait preuve de sens critique, confrontant ses divers résultats les uns aux autres et tirant des conclusions ou corrections en conséquence. Il ou elle tire profit pour ce faire des indications éventuellement données à l'oral.	
L'élève fait preuve d'une certain nombre de connaissances et savoir-faire mathématiques en lien avec le sujet (barycentre, alignement et orthogonalité dans l'espace, sphères, etc.).	
L'élève est capable de présenter oralement et d'argumenter ses résultats.	
L'élève propose une solution complète de l'exercice en effectuant un retour critique sur ses différentes observations et démarches.	

Remarques complémentaires :

Étude de deux suites définies par des relations de récurrence

Énoncé

On considère les deux suites d'entiers u et v définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = v_n + n - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = -1, \\ v_{n+1} = -u_n + 2v_n + n \end{cases}$$

Partie A

1. Donner les 20 premiers termes de chacune de ces suites fournis par le logiciel choisi ou la calculatrice.

Appeler l'examinateur pour vérification

☞ *L'examinateur vérifie que l'élève sait utiliser une calculatrice ou un tableur (ou autre) pour calculer les termes d'une suite. Attention, certaines calculatrices ne permettent pas de définir de telles suites récurrentes « croisées », on vérifiera avant de commencer si les calculatrices employées sont adéquates. Si l'outil logiciel est un tableur, il vérifie que l'élève a pensé à créer une colonne pour le calcul des valeurs de n. On s'assurera que la mise en œuvre ne s'est pas faite avec un décalage d'indices d'une unité, et on invitera l'élève à corriger si c'est le cas.*

2. n étant donné ($n \geqslant 1$), on peut calculer la valeur de u_n et v_n si on connait la valeur de u_{n-1} et v_{n-1}. On voudrait à présent pouvoir calculer, pour n'importe quelle valeur de l'entier naturel n, la valeur de u_n et v_n sans pour autant connaitre autre chose que la valeur de n. Pour cela il faudrait disposer de formules. Le but de cette question est ainsi de déterminer des formules plausibles pour u_n et v_n en fonction de n. Plusieurs approches complémentaires (et non incompatibles) sont proposées :
   - Utilisation de représentations graphiques de u_n (respectivement, v_n) en fonction de n,
   - Utilisation d'une représentation graphique du nuage de points ayant (u_n, v_n) comme coordonnées,
   - Utilisation de suites auxiliaires.

Appeler l'examinateur pour lui exposer la méthode de recherche suivie et lui proposer des formules possibles.

☞ *Les représentations de u_n, v_n en fonction de n suggèrent des paraboles ; l'élève va donc proposer des formules du type $u_n = an^2 + bn + c$; des suites auxiliaires peuvent être alors $u_n - n^2$ ou diverses combinaisons linéaires comme $4v_n - 3u_n + 7$. Le tableur fournit une autre approche pour la détermination de la constante b une fois que a et c sont trouvées, c'est la « recherche de valeur cible », qui revient à résoudre une équation du premier degré à une inconnue. La représentation en nuage, quant à elle, suggère fortement d'introduire $v_n - u_n$ qui est nettement plus simple.*
Si l'élève est peu inspiré par les graphiques, l'introduction des certaines suites combinaisons linéaires pourrait l'aider, et si besoin est on lui indiquera d'examiner $v - u$.

Partie B

3. Justifier le fait que la suite (x_n) définie par $x_n = v_n - u_n$ est une suite arithmétique, et en préciser la raison.

   ☞ *Les conjectures formulées auparavant peuvent suggérer une approche très directe, mais on attend ici une démarche argumentative ne reposant pas sur des conjectures.*

4. Justifier la formule trouvée pour la suite (v_n).

   ☞ *L'examinateur vérifie que l'élève a bien repéré une situation relevant d'un raisonnement par récurrence. Sinon, il le met sur cette voie.*

Production demandée

– Réalisation du calcul donnant les 20 premiers termes des suites u, v.
– Démonstration attendue à la question 4.

Compétences évaluées

– Élaborer un processus itératif avec un logiciel ou une calculatrice.
– Émettre des conjectures.
– Mettre en place une démonstration par récurrence.

Étude de deux suites définies par des relations de récurrence

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

- *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
- *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
- *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable d'obtenir, sur tableur ou sur calculatrice, les termes de la suite. L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral.	
L'élève réalise la ou les représentation(s) graphique(s) attendue(s) et en tire des informations.	
L'élève est capable d'expérimenter, de faire des essais, d'émettre une conjecture sur la « forme du nuage ». Il ou elle utilise de façon pertinente la calculatrice ou le tableur pour étayer ses conjectures, et tire profit des indications éventuellement données à l'oral.	
Suite à un éventuel questionnement oral, l'élève est capable de conjecturer une formule donnant l'expression de u_n et v_n en fonction de n (au moins de reconnaître qu'il s'agit d'un trinôme avec un ou deux coefficients inconnus). Il fait preuve d'esprit critique et met en place des éléments de contrôle, avec un retour éventuel sur sa conjecture s'il y a lieu.	
L'élève montre un certain nombre de connaissances et savoir-faire mathématiques sur le sujet (suites arithmétiques, raisonnement par récurrence, etc.).	
L'élève parvient à présenter (à l'oral ou à l'écrit) une argumentation en faveur d'une ou plusieurs formules et d'émettre un retour critique sur ses observations.	

Remarques complémentaires :

Nombres complexes et géométrie

Énoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$, et peut être ainsi assimilé à l'ensemble des nombres complexes.

Pour tout $a \in \mathbf{R}$, on définit le nombre complexe $z = e^{ia}$. On définit les points M, N et P par leurs affixes respectives z, z^2 et z^3. On définit alors le point Q d'affixe $z + z^2 + z^3$.

Partie A

1. On considère dans cette question que le réel a est fixé. Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

   ☞ *Pour placer le point* Q *on pourra utiliser les vecteurs* $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$. *Certains logiciels, qui permettent directement l'usage de nombres complexes, rendent la tâche plus aisée et l'indication à donner si besoin va dépendre du logiciel retenu. On peut aussi commencer par le barycentre de* M, N, P *puis effectuer une homothétie de rapport 3.*

   Appeler l'examinateur pour contrôle de la transformation choisie et de la figure.

   ☞ *Faire voir, si besoin, qu'une même transformation fait passer de* M *à* N *et de* N *à* P. *Mettre si besoin sur la piste d'une rotation.*

2. Quelle conjecture peut-on formuler sur les points O, N et Q lorsque le réel a varie ?

   Appeler l'examinateur pour vérification de la figure construite.

   ☞ *Si les points* M, N *et* P *ont été bien construits, aiguiller s'il le faut pour la construction du point* Q, *nécessaire à la conjecture.*

3. On s'intéresse enfin à l'évolution de la distance OQ lorsque a varie. Que peut-on observer concernant la (ou une) position de M qui donne la distance OQ maximale ? minimale ?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les éventuelles observations
   et la méthode prévue pour la démonstration attendue à la question suivante.

   ☞ *Il peut être commode d'afficher la distance* OQ *ou bien d'activer un mode «trace» pour le point* Q *; la courbe décrite par* Q *n'est pas simple mais elle ne fait l'objet de cette question.*

Partie B

4. Démontrer la conjecture émise en 2).
5. Justifier soit le maximum soit le minimum de OQ.

   ☞ *Ici il est commode de factoriser d'abord* z^2 *puis de revenir à la forme exponentielle de* z.

Production demandée

– Figure réalisée avec le logiciel de géométrie dynamique.
– Démonstration de la conjecture.
– Obtention du maximum ou du minimum de la distance OQ.

Compétences évaluées

– Réaliser des constructions avec un logiciel de géométrie dynamique.
– Reconnaitre une transformation et l'utiliser dans la construction d'une figure.
– Utiliser l'aspect géométrique des nombres complexes pour caractériser des configurations.
– Émettre des conjectures.

Nombres complexes et géométrie

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève comprend l'énoncé et est capable d'obtenir, au besoin avec une certaine aide, une figure dynamique correcte. Il ne s'agit pas ici de juger de l'efficacité du processus de construction qui dépend du logiciel employé.	
À partir de la figure, le candidat parvient à observer des comportements et formuler des conjectures.	
Le candidat met à profit les indications éventuellement données à l'oral pour affiner ses observations.	
Le candidat fait preuve d'un certain nombre de connaissances et de savoir-faire mathématiques dans le domaine étudié : rotations, vecteurs liés, traduction des constructions géométriques de base et de la distance à l'aide des nombres complexes, etc.	
Le candidat parvient à argumenter de manière précise et organisée pour justifier ses diverses conjectures.	
Le candidat résout complètement l'exercice en effectuant un retour critique sur des démarches et observations.	

Remarques complémentaires :

Étude de deux suites

Énoncé

On considère l'algorithme ci-après qui, à partir d'un entier naturel non nul N , en calcule un autre, noté P.

- Initialiser l'entier P à 1 ;
- Pour i allant de 1 à N :
  Remplacer P par P $\times i$;
  Fin pour ;
- Afficher P.

1. (a) À l'aide d'un tableur, de votre calculatrice ou de tout autre logiciel, mettre en œuvre l'algorithme.

   Appeler l'examinateur pour valider votre algorithme.

   (b) Calculer au moyen de cet algorithme les valeurs de P obtenues pour les entiers N entre 1 et 20.

   ☞ *Le tableur ne permet normalement pas d'afficher* P *comme un entier au-delà de* N = 17*, mais ce n'est pas fort gênant.*

   (c) Quelle formule permet de relier l'entier P calculé à l'entier N choisi pour ce calcul ?

2. On considère les suites (u_n), (v_n) et (e_n) définies pour $n \geqslant 2$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!} \quad \text{et} \quad e_n = v_n - u_n$$

   À l'aide de l'outil de votre choix (numérique ou graphique), émettre une conjecture à propos :

   (a) du sens de variation des deux suites (u_n) et (v_n) ;

   (b) de la convergence de la suite (e_n) ;

   (c) de la nature des suites (u_n) et (v_n).

   Appeler l'examinateur pour valider vos conjectures.

3. (a) En admettant la monotonie de la suite (v_n), démontrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite L et donner un encadrement de L à 10^{-8} près.

   ☞ *Seule la monotonie de (v_n) est un peu délicate à obtenir, mais on n'en demande pas la démonstration pour limiter le volume des productions attendues.*

   (b) Quelle est à votre avis la valeur exacte de L ?

   ☞ *Cette question est uniquement destinée à tester la culture du candidat, aucune démonstration n'est ici attendue.*

Production demandée

– Implémentation et analyse de l'algorithme ;
– Exposé oral des conjectures relatives au comportement et à la nature des trois suites (u_n), (v_n) et (e_n) ;
– Une démonstration de convergence.

Compétences évaluées

– Construire une feuille de calcul ou programmer un algorithme adapté à une suite récurrente.
– Représenter graphiquement une suite.
– Étudier les variations d'une suite.

Étude de deux suites

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
Le candidat parvient à mettre en œuvre un algorithme simple au moyen du logiciel employé.	
À partir d'une inspection des valeurs numériques des premiers termes d'une suite, le candidat formule des observations et en tire l'énoncé d'une conjecture.	
Le candidat met à profit les indications orales qui lui sont communiquées et s'en sert pour progresser dans sa modélisation pour pour corriger une imprécision.	
Le candidat effectue une lecture critique des représentations décimales approchées.	
Le candidat fait preuve d'un certain nombre de savoir-faire mathématiques en rapport avec le sujet étudié : fonction factorielle, connaissance des mécanismes de sommation et utilisation du symbole Σ, suites adjacentes. . .	
Le candidat produit une démonstration correctement argumentée.	

Remarques complémentaires :

Intersection de deux courbes

Énoncé

Soit m un réel donné. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{mx^2-x+m} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{f(x)}\,.$$

On note C_1 et C_2 les courbes représentatives de f et g dans un même repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ du plan.
On se propose d'étudier la position relative des courbes C_1 et C_2 selon les valeurs du réel m.

Partie A

1. Le réel m étant donné, tracer les courbes C_1 et C_2 à l'aide d'un logiciel.

Appeler l'examinateur pour une vérification du graphique réalisé.

☞ *La plupart des logiciels de géométrie dynamique permettent de créer de telles courbes (dépendant d'un paramètre, lequel peut être ajusté à la demande). Si ce n'est pas le cas avec le logiciel de géométrie retenu, on pourra envisager l'utilisation des calculatrices qui, si elle est moins commode, permet quand même l'étude de ce sujet. en cas de difficulté, on pourra proposer à l'élève de travailler avec une valeur fixée de m avant de faire évoluer celle-ci.*

2. Utiliser le(s) graphique(s) obtenu(s) pour répondre aux questions suivantes.
   (a) Conjecturer le nombre de points communs aux courbes C_1 et C_2 selon les valeurs de m.

   ☞ *Si l'élève fait varier m dans un ensemble trop restreint, on pourra lui suggérer d'étendre la recherche.*

   (b) Quelle propriété indépendante de m les points communs à ces deux courbes semblent-ils présenter ?

   ☞ *La réponse la plus évidente est l'ordonnée 1 ; de la définition de g résulte que les abscisses sont inverses, ce qui peut se vérifier à l'écran en affichant le produit des abscisses des deux points.*

   (c) Existe-t-il une ou des valeur(s) de m pour lesquelles les courbes C_1 et C_2 admettent une même tangente en un point commun ?

   ☞ *On examinera si l'élève a bien pensé à tester les valeurs négatives de m.*

Appeler l'examinateur pour une vérification des réponses trouvées.

Partie B

3. (a) Démontrer la propriété observée en 1. c) concernant les points communs aux courbes C_1 et C_2.
   (b) Déterminer le nombre de points communs aux courbes C_1 et C_2 selon les valeurs du réel m.
   (c) Déterminer les valeurs de m telles que les courbes C_1 et C_2 admettent une tangente commune en un point commun.

Production demandée

- Visualiser à l'écran les courbes des fonctions f et g.
- Faire les démonstrations demandées dans la question 3.

Compétences évaluées

- Représenter graphiquement des fonctions dépendant d'un paramètre.
- Utiliser l'aspect dynamique du logiciel pour formuler des conjectures.
- Étude du nombre de solutions d'une équation.
- Discriminant d'une équation du second degré.
- Dérivées de fonctions.
- Tangente en un point de la courbe représentative d'une fonction.

Intersection de deux courbes

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

- *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
- *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
- *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève comprend l'énoncé et est capable de représenter des courbes (au minimum pour une valeur fixée de m).	
L'élève est capable, avec une aide éventuelle (par exemple pour la création d'une suite de courbes ou d'une courbe déformable à partir d'un curseur), de faire des essais et de rassembler des observations pour faire apparaitre une conjecture.	
Suite à un éventuel questionnement oral, l'élève est capable de modifier ou d'enrichir ses démarches.	
L'élève fait preuve d'une certain nombre de connaissances et savoir-faire mathématiques en lien avec le sujet (tangente et dérivées, polynôme du second degré, etc.).	
L'élève est capable de présenter oralement et d'argumenter ses résultats.	
L'élève présente une solution satisfaisante en argumentant correctement sa démarche et en effectuant un retour critique sur ses résultats.	

Remarques complémentaires :

Problème d'optimisation

Énoncé

Quatre hameaux A, B, C et D sont situés aux sommets d'un carré de 10 kilomètres de côté. On se propose de relier ces quatre hameaux par un réseau routier le plus court possible.

Partie A

1. Un première idée est de réaliser un chemin avec un seul croisement en un point M_1 situé à l'intérieur du carré.
   (a) Où à votre avis faut-il placer le point de croisement ?
   (b) Utilisez un logiciel de géométrie dynamique pour vérifier votre conjecture. Vous pourrez placer un «point libre» M_1 et faire afficher la distance $M_1A + M_1B + M_1C + M_1D$.

Appelez l'examinateur pour une vérification de la construction et des réponses trouvées.

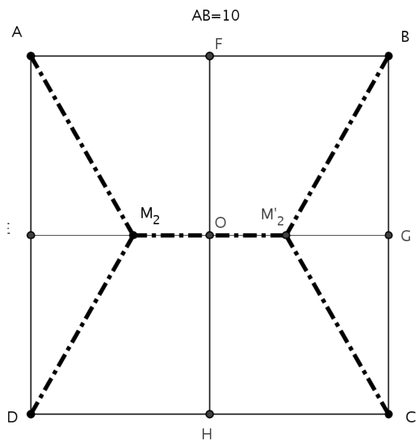
☞ *On attend du candidat qu'il construise un carré de côté* 10 cm*. On acceptera toute construction d'un « vrai » carré même si la longueur du côté est ajustée « à la main » ou « à l'œil ». Si après une dizaine de minutes le candidat n'a pas réalisé la construction on lui donnera les indications nécessaires en fonction du logiciel utilisé.*

2. Une deuxième idée est d'utiliser deux croisements comme le suggère la figure ci-dessous dans laquelle (EG) et (FH) sont des axes de symétrie du carré.
   (a) Placez un «point libre» M_2 sur le segment [EO] et un point M'_2 symétrique de M_2 par rapport à O puis faites afficher la longueur du trajet. Pensez-vous qu'il y a un minimum ? Si oui, donnez en une valeur approchée.

   ☞ *Il semble que le candidat qui a compris la construction du 1.(b) doive faire cette partie sans problème.*
   Si au bout de dix minutes il est bloqué, on peut lui proposer une aide en fonction du logiciel utilisé.

   (b) Comparez à la valeur trouvée à la question précédente.

Appelez l'examinateur pour une vérification de la construction et des réponses trouvées.



Partie B

3. (a) Démontrez que le point obtenu à la première question réalise bien le minimum (pour les trajets à un croisement). Si O est le point que vous avez trouvé, montrez que si M est un autre point, alors MA + MB + MC + MD > OA + OB + OC + OD.

☞ *Il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire. Aider le candidat au bout de dix minutes en faisant afficher de la même couleur les segments* $[M_1A]$, $[M_1C]$ *et* [AC] *par exemple.*

(b) On cherche la valeur exacte du minimum obtenu à la seconde question. Après avoir choisi un paramètre adapté, vous exprimerez la longueur du chemin en fonction de ce paramètre puis déduirez le minimum.

> ☞ *Au bout de dix minutes, si le candidat n'a pas d'idée, on peut lui suggérer de choisir comme paramètre* $x = \mathrm{EM}_2$ *(si on appelle* $f(x)$ *la longueur du trajet, on trouve* $f(x) = 4\sqrt{x^2+25} + 10 - 2x$ *et donc* $10 + 10\sqrt{3}$ *pour minimum).*
> *On peut aussi lui suggérer de choisir comme paramètre* $\alpha = \widehat{\mathrm{EAM}_2}$ *et utiliser les lignes trigonométriques pour trouver le minimum.*

Production demandée

– Obtention à l'écran des figures.
– Réponse argumentée à la question 3.(a).

Compétences évaluées

– Utilisation d'un logiciel de géométrie pour construire une figure dans le plan.
– Utilisation de l'aspect dynamique du logiciel pour établir des conjectures.
– Élaboration d'une stratégie permettant de déterminer le minimum d'une fonction définie géométriquement.

Problème d'optimisation

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève comprend l'énoncé et est capable, avec une aide éventuelle, de bâtir une figure dynamique représentant la situation proposée.	
L'élève sait faire des essais, rassembler des observations pour faire apparaitre une conjecture.	
Suite à un éventuel questionnement oral, l'élève est capable de modifier ou d'enrichir ses démarches.	
L'élève fait preuve d'une certain nombre de connaissances et savoir-faire mathématiques en lien avec le sujet (distance de deux points dans le plan, formule de Pythagore, inégalité triangulaire, etc.).	
L'élève est capable de présenter oralement et d'argumenter ses résultats.	
L'élève propose une solution complète de l'exercice en effectuant un retour critique sur ses différentes observations et démarches.	

Remarques complémentaires :

Aire maximale d'un triangle

Énoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormé et (C) est la parabole d'équation $y = x^2$.

Sur (C), on considère le point fixe A d'abscisse a, réel strictement positif, et un point M dont l'abscisse x appartient à l'intervalle $[0, a]$.

On cherche la position de M pour laquelle l'aire du triangle OMA est maximale.

Partie A

1. On fixe $a = 3$.
   Avec un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer la position de M qui rend l'aire du triangle OAM maximale.

   Appeler l'examinateur pour qu'il vérifie la construction ou en cas de blocage

   ☞ *Dans la première partie, aucune directive de construction n'est donnée. Certains pourront donc être bloqués par la construction du point mobile ; après un temps de recherche infructueux on envisagera de donner à l'élève toutes indications utiles.*

2. La conjecture est-elle confirmée pour d'autres valeurs de a ?

   Appeler l'examinateur pour lui proposer la conjecture

   ☞ *Ce deuxième appel sert juste de validation. En cas d'erreur, il faudra mettre l'élève sur la bonne voie.*

Partie B

3. Soit f la fonction qui, à tout x de $[0, a]$, associe l'aire du triangle OMA.
   (a) Déterminer l'expression de $f(x)$.

   Appeler l'examinateur pour lui proposer l'expression trouvée.

   (b) Étudier les variations de f et en déduire la position de M pour laquelle l'aire est maximale ainsi que la valeur de l'aire maximale.

   ☞ *Seul le calcul de l'aire du triangle peut poser problème. On pourra alors suggérer une différence d'aires.*

Production demandée

– la figure dynamique ;
– validation de la conjecture.

Compétences évaluées

- Construire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique ;
- Émettre des conjectures ;
- Calculer une aire ;
- Étudier les variations d'une fonction.

Aire maximale d'un triangle

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable de construire la parabole demandée ainsi que le point mobile sur la courbe. Il ou elle tire profit des indications éventuellement données à l'oral, notamment dans le cas où le logiciel ne permet pas la construction immédiate de ce point.	
L'élève est capable d'utiliser le logiciel pour déterminer le maximum de l'aire du triangle. L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral.	
L'élève est capable d'émettre un retour critique et cohérent sur ses diverses observations.	
L'élève montre un certain nombre de connaissances et savoir-faire mathématiques : calcul d'aire via les intégrales, tangentes, étude des variations d'une fonction, etc.	
L'élève propose une résolution correcte et argumentée de l'exercice.	

Remarques complémentaires :

Recherche d'un lieu géométrique

Énoncé

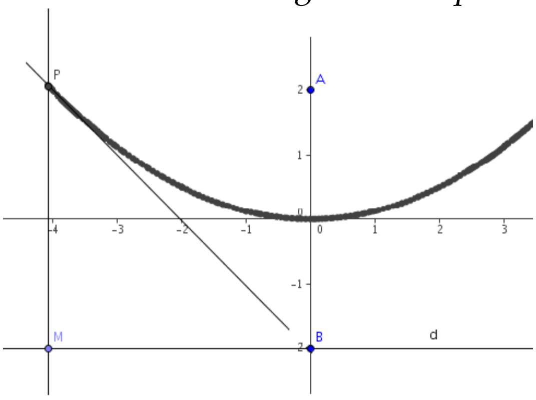
Dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère la droite d d'équation $y = -2$ et le point A de coordonnées $(0\,;2)$.
Pour tout point M de la droite d, on considère le point P, point d'intersection de la perpendiculaire à d en M et de la médiatrice du segment [AM].
Le but de l'exercice est de déterminer le lieu du point P quand le point M décrit la droite d.

Partie A

1. Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Appeler l'examinateur pour vérification de la construction.

☞ *La seule difficulté consiste à faire varier le point* M *(«point libre») sur une droite et pas n'importe où. Au cas où l'élève ne parviendrait pas à créer* M*, il faudrait lui indiquer la démarche à suivre afin qu'il puisse poursuivre l'exercice. Ci-dessous la figure correspondant à la situation réalisée avec geogebra.*



2. Visualiser le lieu du point P lorsque le point M décrit la droite d. Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de ce lieu ?

Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

☞ *Rappeler à l'élève, le cas échéant, comment on fait afficher la «trace» d'un point. Il est ici demandé au candidat de donner la «nature du lieu» et non pas le lieu exact. On acceptera donc toute réponse cohérente, même si le candidat n'a pas trouvé exactement la réponse. Il parait peu probable que sans faire de calcul, le candidat apporte la réponse «courbe $x^2 = 8y$» ; des réponses du type «une parabole» ou «une parabole de sommet O et d'axe Oy» seraient à ce point tout à fait appropriées.*

3. On considère le point Q, milieu du segment [A, P]. Que peut-on dire du lieu du point Q lorsque M varie comme précédemment ?

Appeler l'examinateur pour lui présenter le lieu de Q et les observations associées et lui indiquer la méthode prévue pour le calcul qui suit.

☞ *On appréciera la richesse des réponses proposées par l'élève, qui peuvent être «une autre parabole» à «une parabole homothétique de la précédente», etc.*

Partie B

4. Déterminer par le calcul le lieu du point P lorsque M décrit la droite (d).

> ☞ *Il est demandé, ici, au candidat de savoir faire preuve d'autonomie et de savoir prendre des initiatives. On attend d'un élève de terminale qu'il sache les propriétés d'une médiatrice et aussi qu'il connaisse la distance entre deux points du plan dans un repère orthonormal. Si le candidat a cependant des difficultés à mettre en équation le problème, notamment, s'il se perd dans les équations de droites en essayant de déterminer des équations de* d *et de la médiatrice* [AM]*, on pourra lui apporter des indications.*
> – *à propos des inconnues à définir,*
> – *sur la nature des deux propriétés à utiliser (propriété de la médiatrice et distance entre deux points du plan dans un repère orthonormal) .*
>
> *Si les indications sont données, l'examinateur veillera à ne pas trop sanctionner dans la notation finale. L'objectif final est que l'élève détermine le lieu du point* P*. On exigera des calculs intermédiaires pour valider la démonstration.*

Production demandée

– La figure réalisée avec un logiciel de géométrie dynamique.
– La réponse argumentée à la question 4.

Compétences évaluées

– Construire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
– Médiatrice d'un segment.
– Distance de deux points.

Recherche d'un lieu géométrique

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève comprend l'énoncé et est capable de réaliser une figure dynamique correspondant à la situation proposée.	
L'élève est capable, avec une aide éventuelle (par exemple pour la création d'un point libre variant sur une droite), de faire des essais et de rassembler des observations pour faire apparaitre une conjecture.	
Suite à un éventuel questionnement oral, l'élève est capable de modifier ou d'enrichir ses démarches.	
L'élève fait preuve d'une certain nombre de connaissances et savoir-faire mathématiques en lien avec le sujet (distance, médiatrice, parabole, etc.).	
L'élève est capable de présenter oralement et d'argumenter ses résultats.	
L'élève propose une solution complète de l'exercice en effectuant un retour critique sur ses différentes observations et démarches.	

Remarques complémentaires :

Optimisation en géométrie plane

Énoncé

Dans un repère orthonormal du plan, on considère la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et la droite D d'équation $y = 2x - 3$.

On se propose de déterminer, s'il existe, un point M de $\mathscr{C}$ tel que la distance de M à la droite D soit minimale.

Partie A

1. Utiliser un logiciel de géométrie pour construire la droite D et la courbe $\mathscr{C}$.
2. Placer un point mobile M sur $\mathscr{C}$ et construire le point N image de M par la projection orthogonale sur D.

☞ *L'examinateur pourra, par des questions simples, aider le candidat sur la construction du projeté orthogonal sans le pénaliser.*

3. Conjecturer, au moyen du logiciel, l'abscisse du point M_0 de $\mathscr{C}$ dont la distance à D est minimale.
   Proposer une valeur approchée de cette distance minimale.
   Conjecturer une propriété de la tangente en M_0 à $\mathscr{C}$.

☞ *L'examinateur acceptera une valeur approchée de l'abscisse de* M_0*, la valeur exacte* $\ln(2)$ *étant demandée en démonstration.*

Appeler l'examinateur pour lui présenter les constructions, la valeur approchée et les conjectures.

Partie B

4. Élaborer une méthode permettant de démontrer ces conjectures.

☞ *L'examinateur aidera le candidat qui a du mal à prendre des initiatives sur la partie démonstration.*

Appeler l'examinateur pour lui présenter la méthode.

5. Calculer les coordonnées de M_0 et sa distance à D.

☞ *L'examinateur donnera la formule donnant la distance d'un point à une droite, si le candidat ne s'en souvient plus.*

☞ *On pourra éventuellement pour valoriser le candidat, lui demander de démontrer la conjecture émise sur la tangente.*

Production demandée

– Construction de $\mathscr{C}$, D, M et N au moyen du logiciel de géométrie.
– Conjectures relatives à l'abscisse de M_0 et à la tangente en M_0 à $\mathscr{C}$.
– Proposition d'une valeur approchée de la distance de M_0 à D.
– Calcul des coordonnées de M_0 et de sa distance à D.

Compétences évaluées

– Tracer au moyen d'un logiciel de géométrie des courbes définies par leur équation.
– Construire l'image d'un point par une projection orthogonale.
– Connaitre la définition de la projection orthogonale sur une droite dans le plan.
– Caractériser la tangente en un point à la courbe représentative d'une fonction dérivable.
– Exprimer, en repère orthonormal, la distance d'un point à une droite dans le plan.
– Déterminer un extremum d'une fonction dérivable.

Optimisation en géométrie plane

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable d'utiliser un logiciel de géométrie, avec une aide éventuelle, pour le tracé des courbes $\mathscr{C}$ et D, *la construction du point* N. *Il ou elle tire profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
L'élève est capable de faire des conjectures à partir de ses résultats. *L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral, par exemple pour trouver l'abscisse du point* M_0.	
L'élève montre un certain nombre de connaissances, de savoir-faire mathématiques sur le sujet : distance d'un point à une droite, recherche d'un extremum par l'étude d'une fonction, résolution d'équations.	
L'élève propose une résolution correcte de l'exercice en tirant profit des résultats observés.	

Remarques complémentaires :

Lieu géométrique d'un barycentre dans l'espace

Énoncé

On considère un tétraèdre ABCD ; on note I le milieu du segment [AB], J celui de [CD] et L le point tel que ICJL soit un parallélogramme.

On se donne un nombre réel non nul m et on définit le point G comme barycentre du système de points pondérés

$$\left\{ (\mathrm{A};1),\ (\mathrm{B};1),\ (\mathrm{C};m-2),\ (\mathrm{D};m) \right\}.$$

Le but de l'exercice est de déterminer le lieu du point G quand m décrit l'ensemble des réels non nuls.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique représenter la figure.

   Appeler l'examinateur afin de vérifier la figure obtenue à l'écran.

2. À l'aide du logiciel, répondre aux questions suivantes :

   (a) Où semble se situer le point G lorsque $m = 2$?

   ☞ *Diverses réponses peuvent survenir ; les candidats n'ayant pas perçu le rôle de* I, J, L *peuvent être amenés à mettre en valeur le plan ABD (voire la face ABD du tétraèdre) ou encore la droite (DI).*

   (b) Existe-t-il une valeur de m pour laquelle les points G et L sont confondus ?

   ☞ *L'expérimentation amène rapidement $m = 1$, mais il se peut que l'élève réponde par la définition de* L *comme barycentre ; réponse évidemment acceptable.*

   (c) Visualiser le lieu du point G lorsque m décrit l'ensemble des réels non nuls. Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de ce lieu ?

   Appeler l'examinateur pour vérifier les réponses et la visualisation du lieu.

   (d) Quel rapport y a-t-il entre les longueurs JL et JG ?

   ☞ *Le rapport de longueurs est perceptible à l'écran et peut être confirmé numériquement par un affichage de ces longueurs.*

   Quelle conjecture peut-on énoncer concernant les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{JL}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{JG}}$?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter la conjecture.

   ☞ *Ici l'élève pourra répondre soit en termes de colinéarité (sans plus) soit avec une relation de proportionnalité plus précise.*

Partie B

3. (a) Valider ou invalider la conjecture émise concernant les vecteurs $\overrightarrow{JL}$ et $\overrightarrow{JG}$ à la question 1.(d), et rectifier s'il y a lieu cette conjecture.

   (b) En déduire l'ensemble des points G lorsque m décrit l'ensemble des réels non nuls.

Production demandée

– La visualisation à l'écran du lieu du point G.
– Réponses argumentées pour les questions 3.(a) et (b).

Compétences évaluées

– Construire une figure de l'espace avec un logiciel de géométrie dynamique.
– Tester les conjectures émises.
– Utiliser la notion de barycentre et ses propriétés.
– Savoir repérer un point sur une droite.
– Connaitre la fonction inverse.

Lieu géométrique d'un barycentre dans l'espace

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable de représenter la figure dynamique à l'aide d'un logiciel de géométrie dans l'espace.	
L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral.	
L'élève est capable d'expérimenter, de faire des essais en utilisant de façon pertinente l'outil choisi pour varier les situations (modifications de l'angle de vue etc.) *Il ou elle est capable d'émettre des conjectures en **cohérence** avec ses essais.*	
L'élève fait preuve d'esprit critique avec un retour éventuel sur ses conjectures.	
L'élève montre un certain nombre de connaissances, de savoir-faire mathématiques sur le sujet.	
L'élève maîtrise le passage de l'expérimentation à l'argumentation.	

Remarques complémentaires :

Simulation d'un tirage de boules dans des urnes

Énoncé

On dispose de deux urnes U et V contenant des boules indiscernables au toucher. L'urne U contient dix boules numérotées de 1 à 10. L'urne V contient dix boules numérotées de 0 à 9. Un jeu se déroule de la manière suivante : le joueur verse une mise initiale de 100 jetons, puis il tire au hasard une boule dans l'urne U et une boule dans l'urne V de façon indépendante. Chaque boule portant un numéro inférieur ou égal à 4 rapporte a jetons où a est un naturel non nul, le tirage d'une autre boule ne rapporte ni ne fait perdre aucun jeton. On regarde à l'issue de ce jeu le gain algébrique (gain ou perte) compté en jetons.

Partie A

1. On simule 1000 exécutions du jeu sur un tableur. On fixe dans un premier temps $a = 150$.

   (a) Réaliser une feuille de calcul sur le modèle suivant :

	A	B	C	D
1	Rang du tirage	Numéro de la boule tirée dans l'urne U	Numéro de la boule tirée dans l'urne V	Gain algébrique
2	1			
3	2			
⋮	⋮			
1001	1000			

☞ *L'examinateur aidera le candidat rencontrant des difficultés à établir le test pour le calcul du gain algébrique.*

Appeler l'examinateur pour vérifier la feuille de calcul.

   (b) Déterminer la moyenne des gains obtenus lors de cette simulation.

   (c) À l'aide d'autres simulations, conjecturer la valeur vers laquelle semble tendre la moyenne des gains obtenus.

☞ *L'examinateur veillera à ce que le candidat puisse utiliser la touche de fonction permettant de répéter une même opération.*

Appeler l'examinateur pour vérifier la démarche et la conjecture.

2. On souhaite faire varier la valeur de a.

   (a) Adapter la feuille de calcul pour obtenir des simulations en fonction de a.

☞ *L'examinateur aidera le candidat rencontrant des difficultés à modifier la feuille de calculs.*

   (b) Est-il possible de donner une valeur à a qui paraisse rendre le jeu équitable ?

Appeler l'examinateur pour vérifier la démarche et la conjecture.

Partie B

3. Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique à l'issue d'un tirage.
   (a) Déterminer l'espérance de X en fonction de a.

   ☞ *L'examinateur suggérera au candidat la recherche des probabilités des trois événements en fonction de a si celui-ci ne sait pas débuter le calcul de l'espérance mathématique.*

   (b) Est-il possible de trouver a afin que le jeu soit équitable ?

   ☞ *Rappeler si nécessaire la définition de « jeu équitable ».*

   (c) Comparer le résultat avec les conjectures obtenues dans la Partie A.

Production demandée

– Visualisation à l'écran de la feuille de calcul.
– Réponses argumentées pour les questions posées en 3.(a), 3.(b) et 3.(c).

Compétences évaluées

– Utiliser les fonctions de test d'un tableur ou d'une calculatrice.
– Faire varier la valeur d'une cellule de la feuille de calcul pour tester une hypothèse.
– Simuler une expérience aléatoire à l'aide d'un tableur.
– Calculer l'espérance mathématique d'une variable aléatoire.

Simulation d'un tirage de boules dans des urnes

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

- *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
- *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
- *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable d'utiliser un tableur, avec une aide éventuelle, pour la simulation d'entiers compris entre 1 et 10 (entre 0 et 9), pour le calcul du gain algébrique faisant intervenir la fonction `SI()`. Il ou elle tire profit des indications éventuellement données à l'oral.	
L'élève est capable de faire des conjectures à partir de ses résultats. *L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral, par exemple pour obtenir d'autres simulations en fonction de a.*	
L'élève montre un certain nombre de connaissances, de savoir-faire mathématiques sur le sujet : calcul de probabilités, calcul d'une espérance mathématique.	
L'élève propose une résolution correcte de l'exercice en tirant profit des résultats observés : recherche de la valeur de a donnant une espérance nulle et comparaison avec les conjectures obtenues.	

Remarques complémentaires :

Étude d'une situation géométrique avec les nombres complexes

Énoncé

On donne un quadrilatère ABCD.

On construit, à l'extérieur du quadrilatère, les triangles MAB, NBC, PCD et QDA rectangles isocèles en M, N, P et Q.

On note K, L, U et V les milieux respectifs des segments [AC], [BD], [MP] et [NQ].

Partie A

1. Utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour
   (a) obtenir la figure ci-dessus ;

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure.

   ☞ *La construction des quatre points* M, N, P, Q *peut être longue si l'élève procède « à la main » et à l'aide de médiatrices et de cercles, mais nettement plus brève s'il pense à introduire des similitudes ainsi qu'un « outil » ou un « prototype » . . . On prendra garde au bon positionnement des points (interprétation de la consigne « à l'extérieur »).*

   (b) formuler une conjecture relative aux vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{NQ}$;

   ☞ *De même norme et orthogonaux.*

   (c) formuler une conjecture relative au quadrilatère ULVK ;

   (d) examiner ce qui se passe lorsque ABCD est un parallélogramme.

   ☞ *L'observation de base est que le carré dégénère en un point, une meilleure observation est que c'est le seul cas de dégénérescence.*

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures.

   ☞ *Comme ces conjectures sont nécessaires pour la suite, de l'aide sera éventuellement à fournir pour l'obtention de ces conjectures.*

Partie B

2. Dans le plan complexe, on note a, b, c, d les affixes respectives des points A, B, C et D. Avec l'aide éventuelle d'un logiciel de calcul formel :
   (a) exprimer les affixes m, n, p et q des points M, N, P et Q en fonction de a, b, c et d.
   (b) démontrer la conjecture du 1.(b).

   Appeler l'examinateur pour une vérification des expressions trouvées.

☞ *La réponse ne sera normalement obtenue qu'avec une demande explicite de simplification sur* $\dfrac{q-n}{p-m}$ *(ou une expression analogue) ; on fournira à l'élève, le cas échéant, le nom de la commande de simplification qui permet d'obtenir une réponse pertinente.*

(c) démontrer la conjecture du 1.(c).

Production demandée

– Figure dynamique demandée à la question 1.(a).
– Exposé de la méthode suivie pour obtenir la validation de l'un des conjectures.

Compétences évaluées

– Réaliser une construction avec un logiciel de géométrie dynamique.
– Établir l'expression complexe d'une rotation ou d'une similitude directe.
– Exploiter des relations entre nombres complexes pour obtenir des propriétés d'une configuration géométrique.
– Utiliser un logiciel de calcul formel.

Étude d'une situation géométrique avec les nombres complexes

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

- *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
- *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
- *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
Le candidat est capable d'obtenir une figure correcte. Il ne s'agit pas ici de juger de l'efficacité du processus de construction qui dépend du logiciel employé.	
À partir de la figure, le candidat parvient à observer des comportements et formuler des conjectures.	
Le candidat met à profit les indications éventuellement données à l'oral pour affiner ses observations.	
Le candidat fait preuve d'un certain nombre de savoir-faire mathématiques dans le domaine étudié : similitudes, traduction des constructions géométriques de base à l'aide des nombres complexes...	
Le candidat a su organiser les diverses étapes nécessaires pour la démonstration de sa conjecture.	

Remarques complémentaires :

Une propriété des diviseurs de certains entiers

Énoncé

On dit qu'un entier naturel non nul N est *en division harmonique* si le quotient du nombre de diviseurs de N par la somme des inverses des diviseurs de N est un entier (c'est-à-dire, que le nombre des diviseurs est un multiple de la somme des inverses des diviseurs).

Par exemple :

- 6 admet **4** diviseurs qui sont 1 ; 2 ; 3 et 6 ;
- la somme des inverses des diviseurs de 6 vaut : $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\mathbf{2}$;
- le quotient $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}}=2$ est un entier ;
- 6 est donc en division harmonique.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, dire si les nombres 32 et 140 sont en division harmonique.

   Appeler l'examinateur pour vérification.

   ☞ *L'emploi d'un logiciel de calcul formel, avec des fonctions arithmétiques, permet de répondre facilement à cette question. On s'assurera alors que le candidat connait toutes les fonctions utiles pour la suite.*

   ☞ *L'emploi d'un tableur ou d'un logiciel de calcul numérique demande plus de travail. On attirera l'attention du candidat sur les erreurs d'arrondis du tableur.*

2. Pour tout entier n non nul on pose $q_n = 2^{n+1} - 1$ et $\alpha_n = 2^n q_n$.

   (a) Déterminer à l'aide du logiciel les quatre (ou cinq si possible) premières valeurs de n pour lesquelles q_n est un nombre premier.

   ☞ *L'utilisation d'un logiciel de calcul formel facilite nettement le travail dans cette question, mais aussi dans la suite. Cependant les méthodes peuvent être différentes suivant le logiciel choisi. On veillera à ce que le candidat dispose de toutes les informations utiles concernant les manipulations de listes de nombres (somme, nombre d'éléments...) en fonction du logiciel choisi.*

   ☞ *Le choix du tableur pour trouver la cinquième valeur de n peut s'envisager en utilisant des propriétés du cours sur les tests de primalité d'un entier :*
   – critères de divisibilité ;
   – n est premier si l'entier 1 est le seul diviseur de n inférieur ou égal à $\sqrt{n}$;
   – ...
   On pourra limiter le candidat à la recherche des quatre premières valeurs de n et lui demander simplement d'exposer une méthode utilisant ces propriétés pour de plus grandes valeurs.

(b) Pour chacune des valeurs trouvées, calculer le nombre de diviseurs de α_n et la somme des inverses des diviseurs de α_n. Que peut-on conjecturer ?

Appeler l'examinateur pour vérification des valeurs et présentation de la conjecture.

☞ *Suivant le choix du logiciel de calcul formel, le calcul de la somme des inverses des diviseurs est plus ou moins simple. Il sera probablement utile de donner des indications utiles pour ces opérations.*

☞ *L'utilisation d'un tableur ne pose pas de problème si on se limite aux quatre premières valeurs de n. Cependant, on s'assurera que le candidat a conscience de la nature des résultats numériques obtenus.*

Partie B

3. Soit p un nombre premier.
   Montrer que p n'est pas en division harmonique.
4. On suppose que $q_n = 2^{n+1} - 1$ est premier.
   (a) Donner la liste des diviseurs de α_n en fonction de q_n.
   (b) Que peut-on conclure si la somme des inverses des diviseurs de α_n vaut 2 ?
   (c) Montrer que la situation précédente est vérifiée.

Production demandée

– Questions 3 et 4.

Compétences évaluées

– Utiliser un logiciel adapté à des opérations arithmétiques simples portant sur des entiers ;
– Savoir trouver l'ensemble des diviseurs d'un entier décomposé en facteurs premiers ;
– Connaître les résultats élémentaires concernant les suites géométriques.

Une propriété des diviseurs de certains entiers

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
Le candidat est capable de tester la primalité d'un nombre à l'aide d'outils logiciels.	
Le candidat est capable de tenir compte des problèmes d'approximation dans les calculs réalisés par un logiciel.	
Le candidat est capable, avec une aide éventuelle, d'utiliser des fonctions avancées dans un logiciel : tests, manipulation de données, . . .	
Le candidat est capable d'émettre des conjectures à partir des résultats observés.	
Le candidat tire profit des indications éventuellement données à l'oral.	
Le candidat montre un certain nombre de connaissances mathématique sur le sujet : nombres premiers, tests de primalité, somme des termes d'une suite géométrique. . .	
Le candidat propose une résolution correcte de l'exercice, en tirant profit des résultats observés.	

Remarques complémentaires :

Étude d'une suite de nombres complexes

Énoncé

On considère la suite (u_n) de nombres complexes définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \ u_1 = \mathrm{i} \\ u_{2n} = 1 + \mathrm{i}u_n \\ u_{2n+1} = \mathrm{i} - \mathrm{i}.u_n \end{cases}$$

Partie A

1. Définir cette suite en utilisant un logiciel de calcul numérique ou formel.

Appeler l'examinateur pour lui présenter le travail réalisé.

☞ *Il est ici raisonnable de (faire) déclarer u comme un tableau (global) de taille 2010 tout de suite. Si l'élève utilise un logiciel de calcul formel, il faudra inclure une commande de simplification afin de ne pas obtenir pour les termes de la suite des expressions parenthésées. On s'assurera du fait que l'élève utilise le nom correct pour le nombre complexe* i *(ce nom dépend du logiciel utilisé).*

2. Obtenir le calcul des trente premiers termes de la suite. Quel ensemble de nombres complexes semble parcourir cette suite ?

☞ *Le rôle particulier de l'ensemble* $\{0, 1, \mathrm{i}, 1 + \mathrm{i}\}$*, pour l'instant à constater, provient du fait qu'il est invariant par les deux similitudes réciproques* $z \mapsto 1+\mathrm{i}z$ *et* $z \mapsto \mathrm{i} - \mathrm{i}z$*.*

Partie B

3. *À partir de maintenant, on note* $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

   Obtenir les valeurs de S_{30}, S_{31}, S_{100}, S_{101}, S_{500}, S_{501}, S_{2008} et S_{2009}.
   Quelles conjectures peut-on émettre ?

Appeler l'examinateur pour lui présenter le travail réalisé.

☞ *La conjecture* $S_{2k+1} = k + (k+1)\mathrm{i}$ *est ici attendue ; concernant* S_{2k} *les choses sont plus compliquées mais un élève observateur pourrait noter que* S_{2k} *diffère de* $k + k.\mathrm{i}$ *d'au plus une unité en abscisses (partie réelle) et ordonnée.*

Partie B

4. Vérifier que $S_{2n+1} = u_0 + u_1 + \sum_{k=1}^{n} (u_{2k} + u_{2k+1})$.
   Calculer $u_{2k} + u_{2k+1}$ pour $k \in \mathbf{N}$, et en déduire l'expression de S_{2n+1} en fonction de n.
5. On suppose maintenant que $S_{2n} = n + \mathrm{i}n$, pour $n \in \mathbf{N}$.
   (a) En calculant $S_{2n+1} - S_{2n}$, montrer que :
   $u_{2n+1} = \mathrm{i}$ pour tout entier n.

   (b) Que peut-on en conclure sur la conjecture formulée au début de cette question ?
6. En utilisant éventuellement à nouveau le logiciel, examiner ce qu'on peut dire des entiers n tels que $S_{2n} = n + \mathrm{i}n$.

☞ *La première constatation est le fait que si tous les termes sont dans* $\{0, 1, \mathrm{i}, 1 + \mathrm{i}\}$ *alors* S_n *est parmi quatre valeurs possibles. Une éventuelle approche graphique pourrait ensuite faciliter les choses, faisant émerger une sorte de schéma auto-reproducteur.*

Production demandée

– Définition de la suite (u_n) à partir d'un logiciel de calcul formel.
– Calcul de plusieurs termes et sommes de termes de cette suite .
– Réponses argumentées pour les questions **4.** et **5.**.

Compétences évaluées

– Définir une suite par récurrence dans un logiciel de calcul formel.
– Calculer des termes et une somme de termes de cette suite.
– Tester la parité d'un nombre entier.
– Calculer sur les nombres complexes.
– Utiliser la division euclidienne dans le logiciel choisi.
– Utiliser le symbole $\sum$.
– Émettre et vérifier une conjecture.

Étude d'une suite de nombres complexes

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
Le candidat est capable d'utiliser un logiciel de calcul numérique ou formel, avec une aide éventuelle pour écrire une procédure. Il ou elle tire profit des indications éventuellement données à l'oral.	
Le candidat est capable de faire des conjectures à partir de ses résultats. *Le candidat tire profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
Le candidat montre un certain nombre de connaissances, de savoir-faire mathématiques sur le sujet.	
Le candidat propose une résolution correcte de l'exercice en tirant profit des résultats observés.	

Remarques complémentaires :

Équation avec un paramètre

Énoncé

Dans cet exercice, on s'intéresse aux solutions positives de l'équation (E) : $\dfrac{x}{(2\ln x+1)^2} = mx$, où m est un paramètre réel.

Partie A

1. (a) En utilisant un logiciel adapté, tracer la courbe (C) représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{(2\ln x+1)^2}$ et la droite (d) d'équation $y = mx$.
Conjecturer alors le nombre de solutions de l'équation (E).

Appeler l'examinateur pour lui montrer le graphique et répondre à la question posée.

☞ *Cette question requiert simplement la construction de la courbe et de la droite mobile. La discussion pourra se faire notamment sans que les points d'intersections n'aient été construits avec le logiciel.*

(b) Dans cette question, m est un entier naturel non nul. On note a_m la plus petite des solutions de l'équation (E) et b_m, la plus grande. On s'intéresse aux suites (a_m) et (b_m).
Conjecturer, à l'aide du logiciel, les variations et la convergence de ces deux suites.
Que peut-on dire de ces deux suites ?

Appeler l'examinateur pour lui exposer les conjectures faites et la démarche envisagée pour les questions à venir.

☞ *La construction des points d'intersection de la courbe et de la droite n'est pas toujours simple et dépend beaucoup du logiciel employé. L'énoncé ne demandant pas la construction effective des suites (a_m) et (b_m), l'examinateur pourra en particulier accepter des intersections observées (et non matérialisées par des points). Le caractère adjacent est alors observable sans être toutefois flagrant.*

Partie B

2. (a) Calculer les expressions de a_m et b_m, en fonction de m.
(b) Justifier le sens de variation de la suite (b_m).
(c) Calculer la limite de cette suite.

Production demandée

- Visualisation à l'écran des représentations graphiques.
- Conjectures demandées.
- Réponse écrite et orale à la question 2.

Compétences évaluées

– Représenter graphiquement une fonction dépendant d'un paramètre ;
– Utiliser le logiciel, pour émettre des conjectures ;
– Exprimer les solutions d'une équation en fonction d'un paramètre ;
– Mettre en œuvre les notions du programme sur les suites.

Équation avec un paramètre

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable de construire la courbe demandée ainsi que la droite dont la pente doit être modifiable. Il ou elle tire profit des indications éventuellement données à l'oral.	
L'élève est capable de formuler une conjecture claire quant au nombre de solutions observables en utilisant en particulier des valeurs non entières de m. L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral, par exemple pour affiner sa conjecture, en utilisant un pas plus petit pour les modifications du réel m afin d'observer finement les cas limites.	
L'élève sait modifier la figure construire pour observer le comportement des suites nommées. Il ou elle est capable d'émettre un retour critique sur ses observations.	
L'élève montre un certain nombre de savoir-faire sur les équations en logarithme et de connaissances sur les suites adjacentes.	
L'élève propose une résolution correcte de l'exercice.	

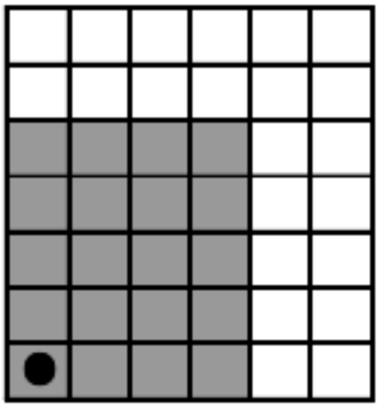
Remarques complémentaires :

Déplacement aléatoire sur un damier

Énoncé

Tous les résultats seront donnés avec une précision de 10^{-3}.

Un pion est situé en bas à gauche d'un damier. Le jeu consiste à lancer un dé à six faces parfaitement équilibré ; si on obtient un multiple de trois, le pion se déplace d'une case vers la droite, sinon il se déplace d'une case vers le haut. Une partie consiste à lancer le dé six fois de suite. Le joueur gagne si à l'issue des six lancers, le pion reste dans la zone grisée.



Partie A

1. À l'aide d'un tableur, simuler 100 parties.

   Appeler l'examinateur pour vérification du tableau.

   ☞ *La constitution du tableau nécessite une bonne organisation, et en particulier d'analyser et de décomposer l'expérience proposée. À la base, l'élève devrait connaitre les fonctions* `SI()`, `ALEA()`, `ENT()`. *Il pourra être utile de fournir ou de rappeler à l'élève quelques autres fonctions du tableur qui vont faciliter sa tâche et lui permettre de se concentrer sur le volet mathématique des choses :* `ALEA.ENTRE.BORNES()`, `ET()`. *Quant au mouvement du pion, il est suffisant de simuler les mouvements horizontaux, mais ce fait peut échapper à l'élève. En pareil cas, il faudra lui donner une indication.*

2. Augmenter le nombre de parties et en tirer l'énoncé d'une conjecture relative à la probabilité que le joueur gagne.

   Appeler l'examinateur pour lui présenter la conjecture.

Partie B

3. Calculer cette probabilité. Est-ce cohérent avec la conjecture de la question précédente ?

   ☞ *Si l'analyse de l'expérience a été bien menée, l'utilité des événements contraires devrait ici apparaitre.*

4. Que donnerait le problème analogue à celui-ci, mais en dimension 3 ?

   ☞ *Cette question, plus délicate, figure ici pour le cas où un élève très brillant aurait achevé les questions précédentes avant le temps imparti.*

Production demandée

- La feuille de calcul simulant une partie de jeu.
- La démonstration de la probabilité théorique de gagner.

Compétences évaluées

- Réaliser une simulation adaptée à la situation avec un outil numérique ;
- Émettre des conjectures à partir de fréquences observées ;
- Calculer des probabilités.

Déplacement aléatoire sur un damier

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable, avec une aide éventuelle, de réaliser la simulation du lancé répété du dé et du déplacement du pion.	
L'élève parvient à répéter l'expérience, prenant l'initiative de recalculer la feuille.	
Il ou elle sait extraire de cette répétition des fréquences empiriques et produit une analyse pertinente des résultats obtenus.	
Il ou elle propose une méthode de dénombrement des éventualités conduisant à la probabilité de gain.	
L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral ; ces indications peuvent être des aides logicielles nécessaires pour réaliser ce qu'il ou elle a prévu.	
L'élève fait preuve d'esprit critique en expliquant pourquoi ou revient sur un éventuel premier résultat insatisfaisant.	
Il ou elle achève l'exercice en opérant une synthèse critique entre l'approche empirique (par simulation) et l'approche théorique.	

Remarques complémentaires :

Divisibilité par 2, 3, 7 et 13 de certains entiers naturels

Énoncé

Pour tout entier naturel n non nul, on considère le nombre U_n défini par :

$$U_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}.$$

On cherche à déterminer si ce nombre peut être divisible par l'un ou plusieurs des nombres premiers suivants : 2 ; 3 ; 7 et 13.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, calculer $U_1, U_2, \cdots, U_{30}$.

   ☞ *En cas de besoin on questionnera le candidat qui utilise mal la syntaxe du logiciel, sur les fonctionnalités dont il ou elle a besoin et on lui indiquera l'aide du logiciel.*

   ☞ *Pour la question suivante l'élève pourrait utiliser une commande du type `MOD( ; )` pour déterminer le reste d'une division euclidienne.*

2. Déterminer les listes des restes de la division de U_n par 2 ; par 3 ; par 7 et par 13.

   (a) Quelles conjectures peut-on en tirer ?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures trouvées.

   (b) À quelle(s) condition(s) sur n, le nombre U_n semble-t-il être divisible par 7×13 ? par $2 \times 7 \times 13$?

   ☞ *L'examinateur aiguillera l'élève qui ne songe pas à donner des critères de divisibilité de U_n par 2, 7 et 13, selon les valeurs de n, vers la problématique du sujet.*

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures trouvées.

Partie B

3. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, U_n est divisible par 7 si, et seulement si, 7 divise $3^n - 1$.

   Appeler l'examinateur pour vérification

   ☞ *L'examinateur pourra amener le candidat à reconnaitre U_n comme la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.*

   ☞ *L'examinateur pourra demander au candidat d'énoncer le théorème de Gauss avant qu'il débute la démonstration de la réciproque.*

4. À l'aide de la question précédente, démontrer la conjecture émise pour 7.
5. Dans le cas où U_n est divisible par 7, U_n est-il divisible par 7×13 ? par $2 \times 7 \times 13$?

☞ *Dans cette question seule une démarche pour la démonstration est demandée.*

Production demandée

– Les différentes conjectures.
– La démonstration de la question 4 .

Compétences évaluées

– Savoir utiliser un tableur.
– Émettre des conjectures.
– Savoir utiliser le théorème de Gauss.

Divisibilité par 2, 3, 7 et 13 de certains entiers naturels

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

- *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
- *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
- *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable d'utiliser un tableur ou un logiciel de calcul numérique, avec une aide éventuelle, pour le calcul des termes U_n *et les restes des divisions euclidiennes. Il ou elle tire profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
L'élève est capable de faire des conjectures à partir de ses résultats. *L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral, par exemple pour donner la forme de l'entier n pour que 7 divise* U_n.	
L'élève montre un certain nombre de connaissances, de savoir-faire mathématiques sur le sujet : divisibilité (congruence), somme des termes consécutifs d'une géométrique, utilisation du théorème de Gauss.	
L'élève propose une résolution correcte de l'exercice en tirant profit des résultats observés.	

Remarques complémentaires :

Nombres premiers et nombres composés

Énoncé

On sait qu'en vertu du théorème de Fermat, tout nombre entier premier impair p divise le nombre $2^{p-1}-1$. On appelle nombre pseudo-premier tout nombre entier n strictement supérieur à 1, qui ***n'est pas premier*** et qui pourtant divise le nombre $2^{n-1}-1$. Le but de l'exercice est de démontrer qu'il existe une infinité de nombres pseudo-premiers.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice adaptés, écrire une procédure ou une fonction déterminant si un nombre entier donné est pseudo-premier.

Appeler l'examinateur, lui indiquer la méthode utilisée et lui montrer les résultat obtenus sur un jeu de données.

   ☞ *Si le candidat ne connaît pas ou utilise mal la syntaxe du logiciel, il faut le questionner sur les fonctionnalités dont il a besoin et lui indiquer l'aide.*

2. Déterminer les nombres pseudo-premiers inférieurs à 1000 et en déduire l'existence d'au moins un nombre pseudo-premier.

Appeler l'examinateur, lui indiquer la méthode utilisée et lui donner le résultat trouvé.

3. Pour les nombres n pseudo-premiers trouvés à la question précédente, que peut-on dire des nombres 2^n-1 ?

Partie B

4. Démontrer qu'un nombre pseudo-premier est impair.

Appeler l'examinateur, lui exposer la démonstration et lui indiquer la méthode choisie pour la démonstration ainsi que la stratégie prévue pour les réponses aux questions suivantes.

5. On sait (somme des premiers termes d'une suite géométrique) que si a est un nombre réel et n un entier ($n>1$), $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)$. En déduire que si n est un nombre pseudo-premier, il en est de même de 2^n-1.

   ☞ *On incitera le candidat qui ne sait pas démarrer à traduire que n est un nombre pseudo-premier pour qu'il puisse écrire 2^n-1 comme un multiple de n.*

6. Démontrer qu'il y a une infinité de nombres pseudo-premiers.

Production demandée

- Explications orales et à l'écran pour les questions 1. et 2.
- Réponse écrite aux questions 3. et 4. et écrite ou orale à la question 5. .

Compétences évaluées

- Savoir utiliser un logiciel de calcul formel.
- Savoir écrire une procédure.
- Émettre des conjectures.
- Raisonnement par l'absurde.

Nombres premiers et nombres composés

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
Le candidat est capable d'utiliser un logiciel de calcul formel , avec une aide éventuelle, pour écrire une procédure. Il ou elle tire profit des indications éventuellement données à l'oral.	
Le candidat est capable de faire des conjectures à partir de ses résultats. *Le candidat tire profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
Le candidat montre un certain nombre de connaissances, de savoir-faire mathématiques sur le sujet : raisonnement par l'absurde, factoriser à partir de l'indication.	
Le candidat propose une résolution correcte de l'exercice en tirant profit des résultats observés.	

Remarques complémentaires :

Suites et fonctions

Énoncé

Soit n un entier naturel, $n \geqslant 1$. On considère les fonctions f_n définies sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}}{n} - 1 + x\mathrm{e}^{1-x}$$

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, conjecturer, suivant les valeurs de n :
   (a) les variations de f_n.
   (b) le nombre de solutions de l'équation $f_n(x) = 0$.
2. On note α_n et β_n les deux solutions, lorsqu'elles existent, de l'équation $f_n(x) = 0$ telles que $\alpha_n < \beta_n$.
   (a) Conjecturer, pour tout $x \geqslant 0$, une inégalité entre $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.
   (b) Quelle conjecture peut-on alors formuler à propos du sens de variation des suites (α_n) et (β_n), et de leur convergence éventuelle ?
   (c) Quelle propriété semblent vérifier les suites (α_n) et (β_n) ?

Appeler l'examinateur pour lui montrer le travail réalisé sur le logiciel et pour vérifier les conjectures formulées.

☞ *L'examinateur aidera, sur certaines fonctionnalités, le candidat désirant représenter les points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.*

Partie B

3. (a) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet, à partir d'une certaine valeur de n, deux solutions distinctes α_n et β_n dans des intervalles que l'on précisera.

Appeler l'examinateur pour vérification.

☞ *Le candidat pourra utiliser le tableau de variation de f_n à partir du graphique. La démonstration pourra être demandée à la fin de l'épreuve.*

   (b) Démontrer que les suites (α_n) et (β_n) sont de monotonies contraires.

Appeler l'examinateur pour vérification.

☞ *Pour aider le candidat à démarrer, l'examinateur l'amènera à utiliser les variations de la fonction f_n.*

   (c) Que peut-on en déduire ?

Appeler l'examinateur pour vérification.

☞ *On pourra éventuellement pour valoriser le candidat, lui demander de déterminer la limite commune des deux suites.*

Production demandée

– Les différentes conjectures.
– Les démonstrations détaillées des questions 3 (a) et 3 (b).

Compétences évaluées

– Savoir utiliser un logiciel de géométrie permettant de tracer des courbes de fonctions.
– Émettre des conjectures.
– Savoir utiliser le théorème de la bijection.
– Savoir utiliser les théorèmes sur les suites monotones bornées.

Suites et fonctions

Nom: Prénom: Note:

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
Le candidat est capable d'utiliser un logiciel de géométrie permettant de tracer des courbes de fonctions et, avec une aide éventuelle, pour créer un « curseur ». *Il ou elle tire profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
Le candidat est capable de faire des conjectures à partir de ses résultats. *Le candidat tire profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
Le candidat montre un certain nombre de connaissances, de savoir-faire mathématiques sur le sujet : théorème de la bijection, théorèmes sur les suites monotones.	
Le candidat propose une résolution correcte de l'exercice en tirant profit des résultats observés.	

Remarques complémentaires :

Section plane d'un tétraèdre

Énoncé

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(-1,0,2)$, $B(3,2,-4)$, $C(1,-4,2)$ et $D(5,-2,4)$.

Soit I et K les milieux respectifs des segments [AB] et [CD], et soit J le point tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

On se propose d'étudier la section du tétraèdre ABCD par le plan (IJK).

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, représenter le tétraèdre ABCD et placer les points I, J et K.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure réalisée.

2. (a) En utilisant le logiciel, vérifier que les points I, J et K déterminent un plan et afficher une équation cartésienne de ce plan.

   (b) Tracer la section du tétraèdre ABCD par le plan (IJK).

   ☞ *La méthode dépend bien entendu du logiciel utilisé.. On valorisera la recherche de points sur une face.*

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure réalisée.

3. (a) Soit L le point d'intersection de la droite (AD) et du plan (IJK). Construire le point L et afficher les coordonnées de ce point.

   (b) Conjecturer la valeur du réel q tel que $\overrightarrow{AL} = q\overrightarrow{AD}$.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et des affichages.

   ☞ *L'examinateur pourra suggérer un affichage des longueurs AL et AD*

4. On admet que les points I, J et K déterminent un plan P.

   (a) Montrer que l'équation proposée par le logiciel est une équation du plan P.

   (b) Déterminer les coordonnées du point L d'intersection de la droite (AD) et du plan (IJK), et préciser la valeur du réel q tel que $\overrightarrow{AL} = q\overrightarrow{AD}$.

   ☞ *On valorisera la mise en équation du problème.*

Production demandée

- Réalisation de la figure.
- Réponse argumentée à la question 4.

Compétences évaluées

– Réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique dans l'espace.
– Réaliser des affichages adaptés aux différentes constructions demandées.
– Observer une figure de l'espace sous différents angles.
– Distance de deux points de l'espace.
– Équation d'un plan.

Section plane d'un tétraèdre

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

- *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
- *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
- *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable de représenter la figure dynamique à l'aide d'un logiciel de géométrie dans l'espace. La représentation de la section et la construction du point L *sont en particulier attendus.*	
L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral.	
L'élève est capable d'expérimenter, de faire des essais en utilisant de façon pertinente l'outil choisi pour varier les situations (modifications de l'angle de vue) *Il est capable d'émettre des conjectures en* ***cohérence*** *avec ses essais, par exemple : l'affichage des longueurs.*	
L'élève fait preuve d'esprit critique avec un retour éventuel sur sa conjecture.	
L'élève montre un certain nombre de connaissances, de savoir-faire mathématiques sur le sujet.	

Remarques complémentaires :

Étude d'un ensemble de points du plan construit à l'aide de deux suites

Énoncé

On fixe un paramètre réel a (différentes valeurs seront essayées par la suite). Deux suites (x_n) et (y_n) sont alors définies par les conditions initiales $x_0 = 20$, $y_0 = 0$ et par la récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \quad \begin{cases} x_{n+1} = a.x_n - y_n \\ y_{n+1} = x_n + a.y_n \end{cases}$$

Dans un repère orthonormé, on considère le point M_n de coordonnées (x_n, y_n). L'objectif est d'observer et d'étudier le nuage des points M_n obtenus, à l'aide d'un logiciel permettant des représentations analytiques.

☞ ***Note sur les outils :*** *La plupart des logiciels de géométrie dynamique ne permettent pas d'obtenir de façon simple les suites (x_n) et (y_n). C'est pourquoi on peut encourager l'usage d'un tableur ou d'un système permettant la définition de ces suites et la représentations des points (ce qui est le cas de certains logiciels de calcul formel). Attention cependant, les représentations graphiques obtenues avec un tableur ne sont pas orthonormales, à moins d'ajuster manuellement la taille des axes.*

Partie A

1. On choisit, dans cette question, de prendre $a = 1$.

   (a) Placer dans un repère orthonormé adapté les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6.

   Appeler l'examinateur pour qu'il vérifie la figure.

   ☞ *Le candidat devra probablement calculer d'une manière ou d'une autre, les termes des deux suites, afin de placer les points. Il faudra donc veiller au bon déroulement des calculs, et, en cas de problème, ne pas laisser passer trop de temps avant d'intervenir. Le candidat devrait prendre l'initiative d'adapter la fenêtre graphique à la figure, mais là encore, il faudra veiller à ce qu'il ne reste pas trop longtemps gêné par cet aspect de la construction.*

   (b) Quelle même transformation semble envoyer M_0, M_1, M_2 M_3, M_4 en M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 respectivement ?

   ☞ *À ce stade on se contente d'une similitude directe de centre O, le rapport et l'angle pouvant être conjecturés par une observation attentive des répétitions.*

   (c) Vérifier la conjecture à l'aide du logiciel pour les points déjà calculés.

   Appeler l'examinateur valider la conjecture ainsi que sa vérification.

☞ *La figure est assez parlante, pour un élève de spécialité. Si la vérification à l'aide du logiciel posait problème, l'examinateur serait attentif aux réactions du candidat suite à l'aide qu'il aurait apportée. Il faudrait alors prendre en compte, lors de l'évaluation, l'état de la préparation du candidat.*
On pourra, le cas échéant, faire afficher les demi-droites $[\mathrm{OM}_1)$ *et* $[\mathrm{OM}_2)$*. Insistons ici sur la logique sous-jacente :* ***s'il est vrai*** *que la transformation est une similitude directe de centre* O*,* **alors** *son angle doit être* $\frac{\pi}{4}$*. Le rapport de la similitude vient par le calcul de* $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

2. On envisage maintenant de faire varier a. En essayant successivement les valeurs $a = 0$, $a = -1$, $a = \pm 1/\sqrt{3}$, $a = \pm 0,75$, formuler des observations relatives à la transformation qui envoie M_n sur M_{n+1}.

Appeler l'examinateur pour lui proposer les observations.

☞ *La valeur* $a = 0$*, la seule qui amène une rotation, doit être analysée en premier. Les valeurs* $\pm 0,75$ *ne donnent pas un angle simple, mais le rapport l'est en ce cas (cela provient indirectement de l'équation de Pythagore* $3^2 + 4^2 = 5^2$*).*

Partie B

3. En déterminant l'affixe du point M_{n+1} en fonction de celle de M_n, expliquer certaines des observations précédentes.

☞ *Il s'agit de trouver le module et l'argument du multiplicateur de la similitude* $f(z) = az$*. On peut conseiller à la candidate ou au candidat de s'intéresser à* $f \circ f$ *qui est souvent plus simple que* f*.*

Production demandée

– Réaliser la figure demandée à l'aide d'un logiciel de géométrie.
– Justification des observations faites à la question 3).

Compétences évaluées

– Représenter des points, donnés par leur coordonnées, à l'aide d'un logiciel de géométrie, d'un tableur ou de tout autre logiciel adapté.
– Expression de transformations du plan à l'aide des complexes.
– Calculs algébriques sur les nombres complexes.

Étude d'un ensemble de points du plan construit à l'aide de deux suites

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

- *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
- *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
- *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
Le candidat est capable d'obtenir une figure correcte. Il ne s'agit pas ici de juger de l'efficacité du processus de construction qui dépend fortement du logiciel employé (ou des combinaisons de logiciels : par exemple calculatrice pour calculer une valeur approchée des coordonnées et logiciel de géométrie pour faire afficher les points).	
Le candidat reconnaît une similitude (on appréciera son degré d'autonomie).	
Le candidat a su utiliser les ressources disponibles pour rechercher des caractéristiques de la similitude, le centre en premier lieu, puis l'angle ou le rapport (on appréciera la précision des réponses fournies).	
Le candidat a su prévoir les diverses étapes qui seront nécessaires à la démonstration de sa conjecture.	
Le candidat a su conduire les calculs et a su réaliser la démonstration attendue.	

Remarques complémentaires :