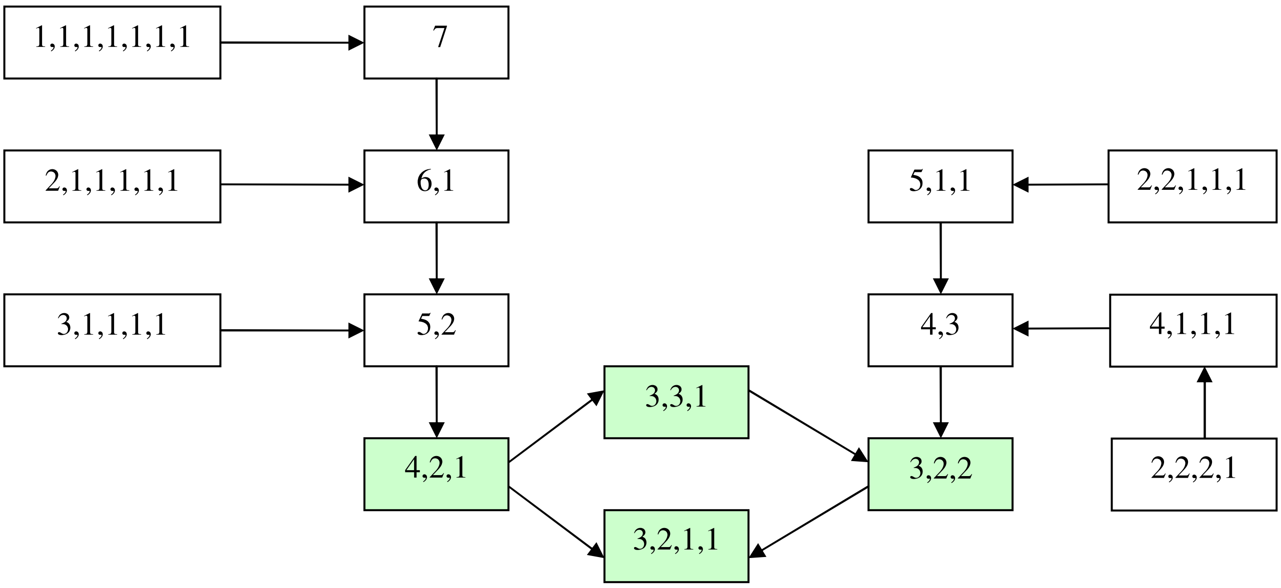
Eléments de correction Olympiades 2007

Ces éléments de correction se veulent les plus complets possible, afin de vous faciliter la tâche. Ils ne constituent en rien ni un modèle ni une liste d'attendus.

Exercice 1

Le graphe ci-dessous donne l'évolution des répartitions à partir d'une répartition quelconque :



Question 1

En partant de la répartition (7), en trois manipulations on obtient la répartition (4,2,1).
Puis quatre manipulations redonnent à nouveau (4,2,1) et ainsi de suite.
Comme 2007 = 501 x 4 + 3 , après 2007 manipulations, on aura encore la répartition $\boxed{(4,2,1)}$.

Questions 2 et 3

On raisonne de même qu'en question 1, mais en sens contraire et en tenant compte du fait qu'au bout de quelques manipulations on rentre dans le cycle des quatre répartitions en vert sur le graphique, et que par ailleurs 2007 manipulations reviennent en général à 3 manipulations. Pour chacune des quatre répartitions du cycle (en vert), on peut déterminer quelles répartitions initiales permettent d'y aboutir en 2007 (c'est-à-dire en 3) manipulations. Il suffit donc de remonter de trois flèches. On obtient donc le résultat suivant :

Les répartitions initiales suivantes…	aboutissent en 2007 manipulations à
(7) (2,1,1,1,1,1) (3,3,1) (4,3)	(4,2,1)
(6,1) (3,1,1,1,1) (3,2,2)	(3,3,1)
(5,2) (3,2,1,1) (2,2,1,1,1) (2,2,2,1)	(3,2,2)
(4,2,1) (5,1,1) (4,1,1,1) ((1,1,1,1,1,1,1)	(3,2,1,1)

Ainsi pour la question 2 :

Les répartitions initiales suivantes…	aboutissent en 2007 manipulations à
(7) (2,1,1,1,1,1) (3,3,1) (4,3)	(4,2,1)

Et pour la question 3, seule la répartition finale (3,3,1) pouvait faire hésiter Virginie entre trois répartitions initiales.

Exercice 2

1) De l'égalité $m^2-p^2=8$, on déduit (*) : $m^2=p^2+8$ donc : $p<m<p+3$, et $m=p+1$ ou $m=p+2$.
Avec $m=p+1$, (*) est impossible. Avec $m=p+2$, il vient $p=1$ et $m=3$.

2) une étude simple de la figure (à partir de triangles rectangles isocèles par exemple) permet d'établir que :
DC= AB-AD ; MN=AB-2
L'égalité des aires conduit alors à : $(AB-4)^2-(AD-AB)^2=8$.
On obtient avec 1) : AB=7, AD=6, DC=1.

On peut aussi travailler à partir d'un pavage du « grand » triangle obtenu en prolongeant (AD) et (BC).

Exercice 3 (S-STI)

Soit n et m les longueurs des côtés cherchés. D'après le théorème de Pythagore, il vient $n^2 + m^2 = 14^2 = 196$. Ainsi $m = \sqrt{196 - n^2}$, avec $n \in]0\,;14[\cap \mathbb{N}$. Il suffit d'utiliser le tableur de la calculatrice afin de passer en revue tous les cas, avec un pas de 1 pour les valeurs de la variable. On constate alors que toutes les valeurs de la fonction sont non entières. Ainsi, il n'existe aucun triangle répondant aux conditions imposées.

D'après la question précédente, si un tel triangle existe alors ou n ou m est égal à 14. Supposons que ce soit m et appelons p l'hypoténuse du triangle. On a donc :
$14^2 = p^2 - n^2 = (p - n)(p + n)$. $p - n$ et $p + n$ sont des entiers naturels, et $p - n < p + n$. On cherche les diviseurs entiers naturels de 14^2. Or $14=2\times7$. Donc 196 a pour diviseurs 1 ;2 ;4 ;7 ;14 ;28 ;49 ;98 ;196.
On obtient des couples (a ;b) possibles pour $p - n$ et $p + n$.
Or $p - n = a$ et $p + n = b \Leftrightarrow n = \frac{b - a}{2}$ et $p = \frac{b + a}{2}$. On a consigné les divers résultats dans le tableau ci dessous :

a	b	n	p
1	196	97,5	98,5
2	98	48	50
4	49	10,5	17,5
7	28	22,5	27,5
14	14	0	14

D'après ces résultats, seul le couple (n ;p)=(48 ;50) est à valeurs entières.
Or $48^2 + 14^2 = 50^2$. Donc, il n'existe qu'un seul triangle(à une isométrie près…) satisfaisant les conditions imposées : ses côtés ont pour longueurs : 14 ; 48 ; 50.

Exercice 4 (S-STI)

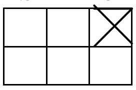
$f_1(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ $f_2(x) = \dfrac{1}{1-x}$ $f_3(x) = x$ et $f_4(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = f_1(x)$

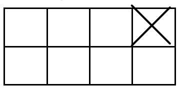
Comme 2007 est un multiple de 3, f_{2007} est l'identité sur $\mathbf{R}-\{0\,;1\}$.
Nous avons donc f_{2007} (2007) = 2007

Exercice 3 (autres séries)

Problème 1 : oui le premier joueur peut gagner à tous les coups.
Au premier coup, il enlève tout sauf la ligne du bas et la colonne de gauche, cela forme un L à cotés égaux.
Quoique joue le deuxième joueur, le premier joueur reforme un L à cotés égaux. Le deuxième joueur a perdu.

Problème 2 : oui le premier joueur peut gagner à tous les coups
Celui qui laisse une colonne, une ligne ou un carré a perdu.
Celui qui laisse un L symétrique a gagné.
La valeur de n n'est pas spécifiée. (n=1, n=2 sont évidents à traiter)
Si n = 3 si n = 4





Le premier enlève un seul carré en haut à droite, il oblige alors le second à recréer un rectangle jusqu'à obtenir un carré.

Exercice 4 (autres séries)

Question 1 :
Chaque jour à 8 h 00, la montre retarde de 5 secondes (+15 – 20) de plus que la veille.
Donc 24 jours plus tard la montre retarde de 120 secondes soit deux minutes.
C'est-à-dire le 7 avril à 8 heures.
Question 2 :
Voici une copie d'un fichier tableur

rang du jour	avance/retard
0	0
0,5	15
1	-5
1,5	10
2	-10
2,5	5
3	-15
3,5	0
4	-20
4,5	-5
5	-25

5,5	-10
6	-30
6,5	-15
7	-35
7,5	-20
8	-40
8,5	-25
9	-45
9,5	-30
10	-50
10,5	-35
11	-55
11,5	-40
12	-60
12,5	-45
13	-65
13,5	-50
14	-70
14,5	-55
15	-75
15,5	-60
16	-80
16,5	-65
17	-85
17,5	-70
18	-90
18,5	-75
19	-95
19,5	-80
20	-100
20,5	-85
21	-105
21,5	-90
22	-110
22,5	-95
23	-115
23,5	-100
24	-120
24,5	-105
25	-125
25,5	-110
26	-130
26,5	-115
27	-135
27,5	-120
28	-140
28,5	-125
29	-145
29,5	-130
30	-150

Et on trouve que la montre retarde toujours de plus de 2 minutes 27,5 jours plus tard soit le 10 avril à 20 heures.