Activité Introduction des nombres relatifs

À partir du travail du groupe didactique de l'IREM d'Aquitaine,
Brochure Entrées dans l'algèbre 6^{e} et 5^{e}

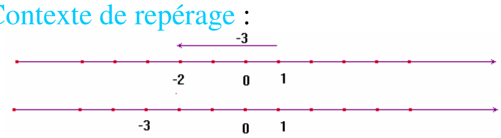
→ Aperçu historique

I^{e} siècle : les Chinois utilisaient les négatifs pour des problèmes de comptabilité.
XV^{e} siècle : apparition des négatifs en Occident avec Nicolas Chuquet ; utilisés comme auxiliaires de calcul dans les résolutions d'équations.
Fin du XIX^{e} siècle : En Occident, les négatifs ont un statut de nombre.

→ Différents contextes

❶ Contextes concrets : recettes et dépenses, gains et pertes, températures, altitudes, chronologie, ascenseur.

❷ Contexte de repérage :



-3 est une variation

-3 est un repère indiquant un état

❸ Contexte interne aux mathématiques
On résout des équations.

☺ **Varier les situations pour aborder les différents contextes.**

→ Extrait du document d'accompagnement – Les nombres au collège – Décembre 2006

« Les nombres négatifs sont désormais abordés à partir de la classe de cinquième. Ils posent des difficultés spécifiques aux élèves. D'une part, pour la première fois, ils sont confrontés à des nombres qui n'expriment pas des quantités ou des grandeurs (en dehors des dettes et des créances), ce qui constitue une rupture importante avec les nombres manipulés jusque là. D'autre part, la notation habituelle de ces nombres utilise le signe – qui est, pour les élèves lié à une opération, la soustraction, ce qui contribue à accroître les difficultés liées au calcul sur les nombres relatifs. […]
Il paraît plus fécond d'envisager ***une approche plus théorique*** *de ces nouveaux nombres, par exemple, comme le suggère le commentaire du programme de cinquième en cherchant des nombres qui rendent la soustraction toujours possible et dont le maniement est ensuite compatible avec les propriétés des opérations mises en évidence sur les nombres positifs. […] Il est raisonnable de penser que l'appui sur plusieurs significations des nombres relatifs peut être utile à différents moments de leur apprentissage. »*

Introduction des nombres relatifs

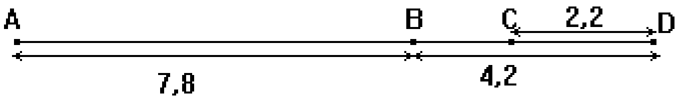
Dans le travail présenté, les nombres relatifs sont introduits en se plaçant dans le contexte interne aux mathématiques à partir de l'égalité 6 + … = 4.

Étape ⓪ : Établir que $(a + b) - c = a + (b - c)$.
Cette étape n'est pas nécessairement à faire juste avant l'introduction des relatifs mais plus tôt dans l'année lors du chapitre sur l'organisation des calculs par exemple.

1. Margot va à la librairie, elle achète deux articles : un cahier à 2,75 € et un livre à 8,25 €.
Le libraire lui fait une réduction de 0,50 € sur le prix du livre.
Calculer le prix total que Margot doit payer de deux façons différentes et pour chacune, écrire les calculs en une seule ligne.

Lors de la mise en commun, l'égalité suivante est demandée aux élèves :
2,75 + (8,75 – 0,50) = (2,75 + 8,25) – 0,50

2.



Calculer la longueur AC de deux façons différentes et pour chacune, écrire les calculs en une seule ligne.

On obtient l'égalité : (7,8 + 4,2) – 2,2 = 7,8 + (4,2 – 2,2)

Les deux égalités étant au tableau, le professeur demande aux élèves d'écrire d'autres égalités du même type avec des nombres de leur choix pour s'assurer que les élèves ont bien repéré la structure commune à ces deux égalités. Puis il demande aux élèves de formuler une propriété à l'aide de lettres comme ils l'ont déjà fait pour la distributivité.

Bilan :

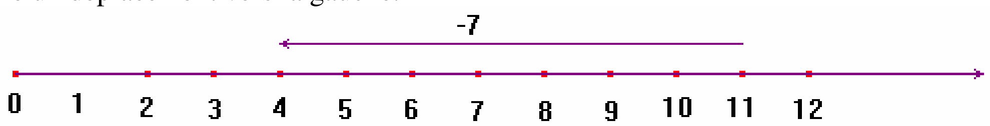
Propriété (admise) : Étant donnés trois nombres a, b et c quelconques, les deux expressions suivantes sont égales : $(a + b) - c = a + (b - c)$

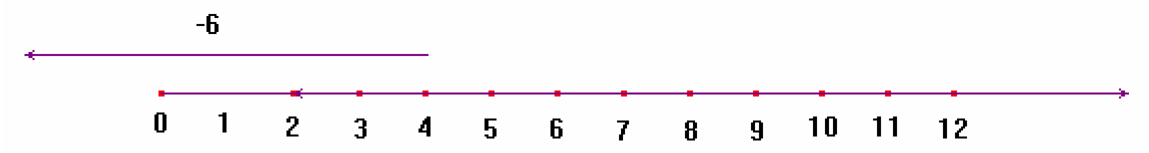
Étape ① : Introduction du nombre -2 comme convention pour 0 – 2.

Compléter les pointillés
7 + … = 11
28 + …. = 85
194 + … = 251
37 + … = 37
6 + … = 4

D'abord les élèves complètent en calculant mentalement puis quand les nombres deviennent compliqués, ils posent la soustraction.

Une illustration de la résolution à l'aide de la demi-droite graduée est proposée ; la soustraction est perçue comme un déplacement vers la gauche.





Graphiquement, on s'aperçoit que pour la dernière égalité, la demi-droite graduée ne suffit plus : on « tombe dans le vide ». On arrivera alors par la suite naturellement à la droite graduée.

Au sujet de la dernière égalité :

La plupart des élèves pensent que la dernière égalité est impossible, mais certains proposent –2 (utilisation de la calculatrice ou intuition). D'autres se réfèrent au travail sur les multiplications à trou, travail ayant permis d'introduire ou de réactiver la définition de la fraction nombre, et répondent $\frac{6}{4}$.
Enfin des réponses telles que « 4 – 6 » sont données.

En effet, ces élèves ont observé que dans les égalités précédentes, par exemple, dans 7 + … = 11, le nombre cherché 4 peut s'écrire (11 – 7) et on obtient l'égalité :
7 + (11 – 7) = 11
Par analogie, pour la dernière égalité, les élèves vont écrire : 6 + (4 – 6) = 4
En réinvestissant l'égalité $(a + b) - c = a + (b - c)$, l'égalité devient : (6 + 4) – 6 = 4
Soit encore 10 – 6 = 4. Ce qui justifie la validité de l'égalité initiale : 6 + (4 – 6)= 4.

Le professeur demande aux élèves de trouver d'autres solutions.

Des élèves proposent de remplacer les pointillés par 4 – 6 ou par 2 – 4, ou 0 – 2, ce qui donne :
6 + 4 – 6 = 4 ou 6 + 2 – 4 = 4.

Lors de la mise en commun, les élèves confrontent leurs solutions, on peut en déduire que
4 – 6 = 2 – 4 = 1 –3 = ….. = 0 – 2

Le professeur explique alors que le nombre 0 – 2 sera désormais noté -2.

Le nombre négatif est introduit comme différence de deux entiers, ce qui est cohérent avec la conception de la fraction comme rationnel et quotient de deux entiers que les élèves ont rencontrée en 6ème.
La demi-droite graduée est étendue à la droite graduée et on y place le nombre -2. L'ensemble des entiers est inclus dans l'ensemble des relatifs.

Exercice :

Écrire plusieurs égalités à trous ayant –2 comme solution

Les élèves écrivent : 3 + (-2) = 1 et 1 – 3 = -2
-2 + 5 = 3 et 3 – 5 = -2
2 + (-2) = 0 et 0 – 2 = -2

Bilan

Définition : Le nombre qui ajouté à 6 donne 4 est le nombre (4 – 6).

Notation : Ce nombre est noté -2.
Vocabulaire : -2 est un nombre négatif.
Remarque : -2 = 0 – 2 = 1 – 3 = 4 – 6 = ….
On a alors 6 + (-2) = 4.

Étape ② : Nombres opposés

On redonne des additions à trous avec une solution positive ou négative, en variant la place du trou, et on glisse parmi ces exercices, l'égalité :

$$\ldots. + 5 = 0$$

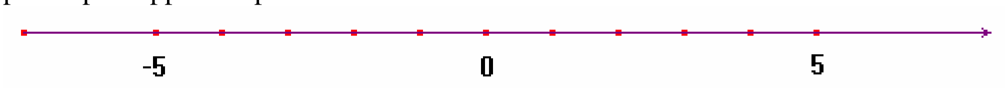
Bilan

Définition : Deux nombres sont opposés quand leur somme vaut zéro.

Exemple : -5 + 5 = 5 + (-5) = 0

Les deux nombres 5 et –5 sont opposés.

Remarque : En plaçant les points d'abscisse -5 et 5, des remarques sont faites sur la symétrie de ces points par rapport au point d'abscisse 0.



Étape ③ : On opère avec certains nombres relatifs.

1. Effectuer les soustractions suivantes. (*on mélange les résultats positifs et les résultats négatifs*)
   35 – 17
   23 – 48 *on utilise (23 – 23) – (48 – 23) = 0 – 48 = -48*
   34 – 26
   48 – 72, etc.
2. Effectuer les additions de nombres relatifs suivantes. (*additions dont le résultat est positif)*
   7 + (-4)
   12 + (-5)
   54 + (-29)
   -35 + 68
   -17 + 21, etc.

Fin du travail sur l'introduction des nombres relatifs.

Étape ④ : On opère avec tous les nombres relatifs.

Passage à l'addition de deux relatifs de signe opposé avec un résultat négatif

Exemple :

-8 + 5 = -8 + (8 – 3)

-8 + 5 = (-8 + 8) – 3 d'après l'égalité $(a + b) – c = a + (b – c)$

-8 + 5 = 0 – 6

-8 + 5 = -6 d'après la définition de -6

Ou

5+ (-8) = 5 + (0 – 8) d'après la définition de -8

5 + (-8) = (5 + 0) – 8 d'après l'égalité $(a + b) – c = a + (b – c)$

5 + (-8) = 5 – 8

5 + (-8) = -3

Passage à l'addition de deux relatifs négatifs

Exemple :

-4 + (-2) = -4 + (4 – 6)

-4 + (-2) = (-4 + 4) – 6 d'après l'égalité $(a + b) – c = a + (b – c)$

-4 + (-2) = 0 – 6
-4 + (-2) = -6

Passage à la soustraction (Il est préférable de laisser passer du temps entre la leçon sur l'addition et celle sur la soustraction)
Exemple :
-6 – (-2) = ?
-2 + ? = -6 donc ? = -4
En reprenant la première égalité : -6 – (-2) = -4
Et sachant aussi que -6 + 2 = -4
Remarque : Toutes ces décompositions ne sont pas exigées des élèves à chaque fois. Il s'agit de prouver certains résultats, et de faire oraliser aussi souvent que possible ce type de justifications par les élèves.