MINISTÈRE DE
L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DE LA VIE ASSOCIATIVE

MINISTÈRE DE
L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Classes de premières (séries ES, L, STG et STL)

Concours 2012

♦ ♦ ♦

Mercredi 21 Mars 2012

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

♦ ♦ ♦

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus et les idées qui leur sont venues.

Exercice numéro 1

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

- 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4.
- 32 n'est pas *digisible* car il n'est pas divisible par 3.

On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

1. Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.

2. Proposer un nombre *digisible* à quatre chiffres.

3. Soit n un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

a. Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.

b. Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.

c. Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.

d. Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

4. Soit n un entier *digisible* quelconque.

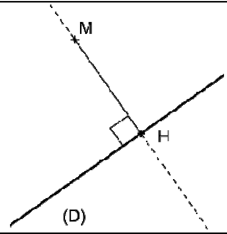
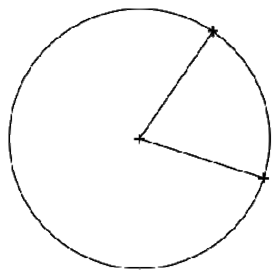
a. Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.

b. Si n s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n.

c. Déterminer le plus grand entier *digisible*.

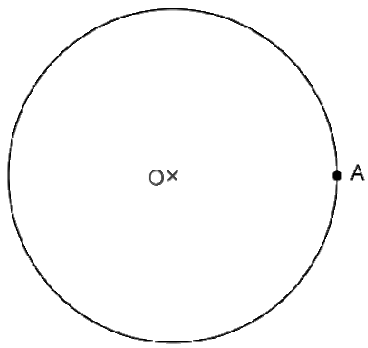
Exercice numéro 2

Rappels

• *On appelle **distance entre un point M et une droite (D)** la distance MH, où H est le point d'intersection de (D) avec la droite perpendiculaire à (D) passant par M.*	
• *Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure α (en degrés), alors **l'aire de la portion de disque** grisée vaut* $\pi\alpha R^2/360$. *Dans la partie II de l'exercice, on considérera la distance d'un point M à **un segment [**BC] comme étant la distance du point M à la droite (BC).*	

Partie I

Soit C un cercle de centre O, A un point de ce cercle et D le disque délimité par ce cercle.



1. Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A.
2. Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A.
3. Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D.

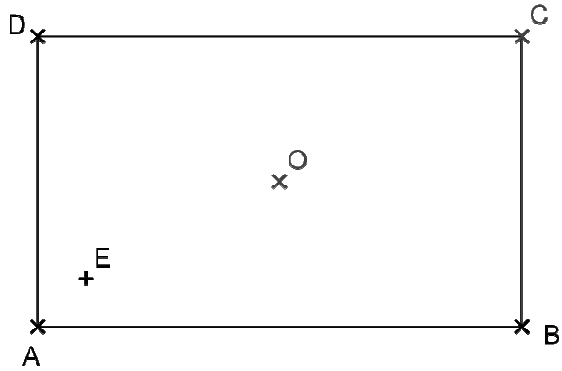
   Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?

Partie II

Soit ABCD un rectangle de longueur AB = 20 cm et de largeur BC = 12 cm, de centre O.

Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).

Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle ABCD.



1. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AD] ?

2. ***a.*** Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés [AB] et [BC].

   b. Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté [BC] que du côté [AB].

   c. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?

3. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [AB] que des trois autres côtés [BC], [CD] et [DA] ?

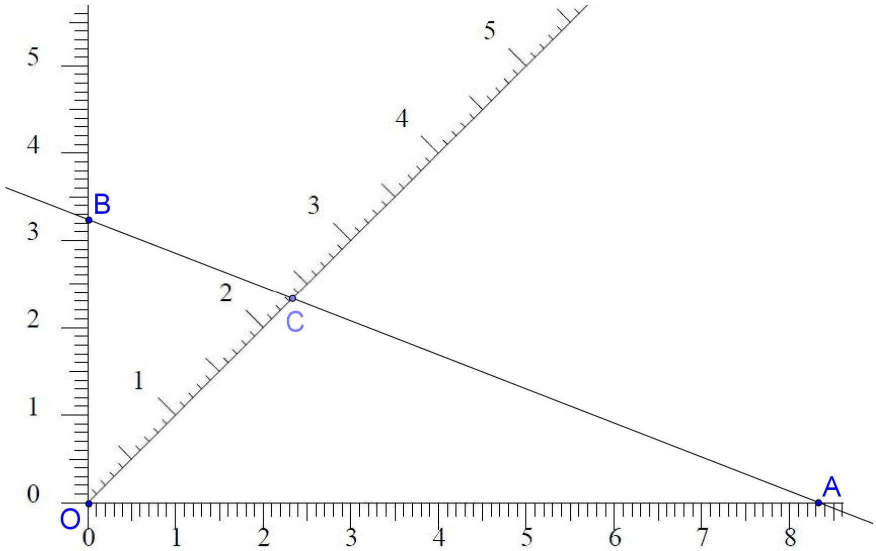
4. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?

5. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

Exercice numéro 3

Ci-dessous est présenté un instrument de calcul.

L'objectif de l'exercice est d'en déterminer la fonction.



On considère un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

A est un point de la demi-droite [O ; $\vec{i}$), distinct de O et B est un point de la demi-droite [O ; $\vec{j}$), distinct de O. C est le point de la bissectrice issue de O dans le triangle OAB tel que les points A, B et C soient alignés.

On note a et c les abscisses respectives des points A et C dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

On note b l'ordonnée du point B dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1. a. Démontrer que $c = \dfrac{ab}{a+b}$

   b. En déduire que $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

2. Expliquer alors l'usage que l'on peut faire de l'instrument de calcul représenté ci-dessus.

Exercice numéro 4

Pierre se présente devant une machine à algorithmes.

La machine lui demande de choisir un réel x au hasard.

La machine applique alors à x l'un des deux algorithmes suivants ;

Dans deux cas sur trois, elle choisit l'algorithme n° 1 et donc, dans un cas sur trois, l'algorithme n° 2.

Algorithme 1	**Algorithme 2**
VARIABLES ***x* EST_DU_TYPE NOMBRE** ***y* EST_DU_TYPE NOMBRE** **DEBUT_ALGORITHME** **LIRE *x*** ***y* PREND_LA_VALEUR** $\boldsymbol{x-1}$ ***y* PREND_LA_VALEUR** $\boldsymbol{y \times y}$ ***y* PREND_LA_VALEUR** $\boldsymbol{y-5}$ **AFFICHER *y*** **FIN_ALGORITHME**	**VARIABLES** ***x* EST_DU_TYPE NOMBRE** ***y* EST_DU_TYPE NOMBRE** **DEBUT_ALGORITHME** **LIRE *x*** ***y* PREND_LA_VALEUR** $\boldsymbol{x-1}$ ***y* PREND_LA_VALEUR** $\boldsymbol{6 : y}$ ***y* PREND_LA_VALEUR** $\boldsymbol{2+y}$ **AFFICHER *y*** **FIN_ALGORITHME**

1. Pierre entre le nombre 2 dans la machine.

Quelle est la probabilité que la machine affiche 8 ?

2. La machine affiche – 4.

Quels nombres Pierre a-t-il pu entrer ?

3. a. Exprimer en fonction de x la valeur de y obtenue à l'affichage de l'algorithme 1.

On notera $f(x)$ cette expression.

b. Exprimer en fonction de x la valeur de y obtenue à l'affichage de l'algorithme 2.

On notera $g(x)$ cette expression.

4. Pierre choisit un nombre au hasard dans l'intervalle [– 5 ; 5] et l'introduit dans la machine.

   Quelle est la probabilité que le nombre affiché par la machine se trouve dans l'intervalle [– 4 ; 4] ?