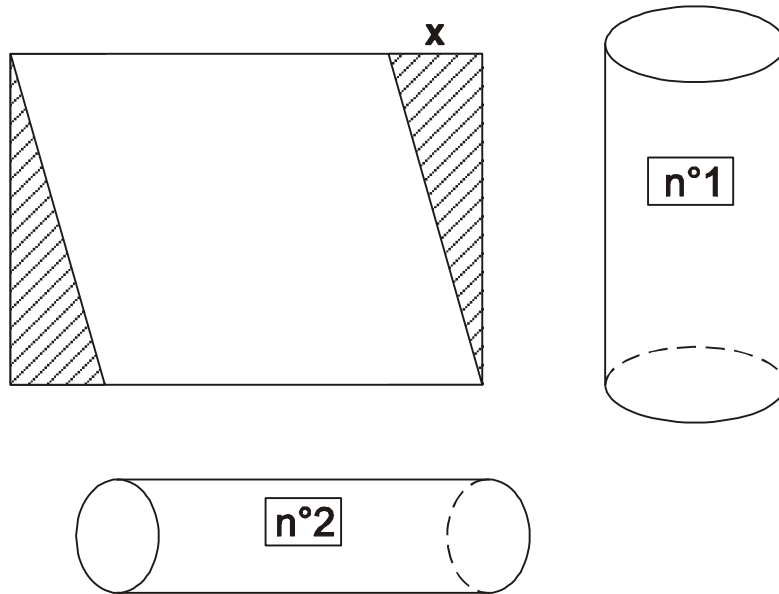


Exercice 2 : les cylindres en papier

1. On prend une feuille de papier de 21 cm de large et 29,7 cm de long (le format A4). On forme un cylindre en roulant la feuille de papier et en faisant coïncider deux bords opposés. En faisant de même avec les deux autres bords opposés, on obtient un autre cylindre.

Les deux cylindres ont-ils même volume ?

2. Dans une feuille de papier de format A4, on enlève deux triangles de mêmes dimensions selon la figure ci-dessous :



Si on roule la feuille restante bord à bord, on obtient un premier cylindre (n°1). Si on la roule en faisant coïncider les autres bords opposés, on obtient un second cylindre (n°2).

Trouver la ou les valeurs de x (en cm) pour que les deux cylindres ainsi obtenus aient le même volume.

Exercice 3

L'unité de longueur est le décimètre.

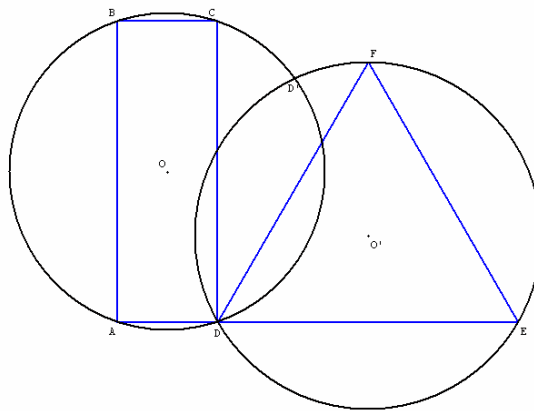
On construit un rectangle ABCD et un triangle équilatéral DEF tels que :

- A et E sont fixes avec $AE=1$,
- D est un point mobile du segment $[AE]$,
- le périmètre du rectangle ABCD est 2.

(Les points B, C et F sont situés dans le même demi-plan, délimité par la droite (AE), comme sur la figure ci-dessous). On introduit :

- \mathcal{C} le cercle circonscrit au rectangle ABCD, de centre noté O,
- \mathcal{C}' le cercle circonscrit au triangle DEF, de centre noté O'.

Les cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' se coupent en D et en un autre point D', (supposé distinct de D dans la suite).



On pose $x = DE$. La figure a été construite avec $x = 0,75$.

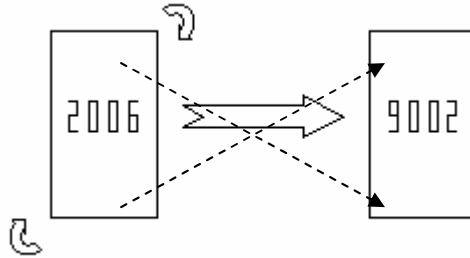
1. Construire la figure avec $x = 0,6$.
2. Pour quelle(s) position(s) du point D le rectangle ABCD et le triangle DEF ont-ils la même aire?
3. Pour quelle valeur de x le quadrilatère ODO'D' est-il un losange ?
4. Montrer que, pour la valeur de x trouvée à la question 3, le losange ODO'D' est un carré.

Exercice 4

Les nombres entiers naturels sont formés à partir des dix chiffres suivants obtenus par combinaison de sept segments, conformément à l'affichage digital usuel :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

On écrit un nombre entier, noté a , sur une feuille. On fait pivoter la feuille de telle sorte que le haut et le bas de la feuille s'échangent, comme l'illustre le schéma suivant



Si sur la feuille ainsi pivotée on peut lire de nouveau un nombre entier noté b , alors le nombre a écrit initialement sur la feuille est dit « pivotable », et le nombre b est dit « pivoté » de a .

Par exemple :

90	est pivotable et son pivoté est	06	
57	n'est pas pivotable car	LS	n'est pas l'écriture d'un entier.
2006	est pivotable et son pivoté est	9002	

Quel est le 2006^{ème} nombre entier pivotable ?

Solution de l'exercice 3

1. Cette question a pour but de se familiariser avec le sujet et ne présente pas de difficultés.
2. Il faut déterminer $AD=1-x$ et $AB = 1 - AD = 1 - 1 + x = x$. L'aire de ABCD est donc $x(1-x)$.
On détermine la hauteur de DEF (Pythagore et la hauteur d'un triangle équilatéral est aussi médiane). On a $h = \frac{\sqrt{3}x}{2}$ et aire de DEF = $\frac{\sqrt{3}x^2}{4}$. On résout l'équation $\frac{\sqrt{3}x^2}{4} = x(1-x)$ soit $(\frac{\sqrt{3}}{4} + 1)x^2 - x = 0$ d'où $x = \frac{4}{\sqrt{3} + 4}$ ou $x=0$, qui est à rejeter car D est alors égal à D'.
3. ODO'D' est un losange ssi les rayons des cercles sont égaux. Le rayon de C est la demi diagonale du rectangle de mesures $1-x$ et x donc $R^2 = \frac{1}{4}(2x^2 - 2x + 1)$.
Détermination du rayon de C' : les hauteurs d'un triangle sont aussi médianes. Le centre du cercle circonscrit est aussi centre de gravité et donc $R' = \frac{2}{3}h = \frac{x}{\sqrt{3}}$.
 $R=R'$ ssi $\frac{1}{4}(2x^2 - 2x + 1) = \frac{x^2}{3}$ ssi $x = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$ ou $x = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$. Or $x \in [0 ; 1]$ donc la solution est $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$.
4. La mesure de l'angle O'DF est 30° car (O'D) est la bissectrice de FDE. Il en est donc de même de l'angle CDF car ABCD rectangle. De plus, dans le triangle BCD, $\tan a = \frac{1-x}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ où a est l'angle BDC. Donc $a=30^\circ$, et ODO'D' est un losange dont un angle est droit (car $\angle ODO' = a + 30^\circ + 30^\circ$) : c'est un carré.