Olympiades S-STI

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

***

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

Exercice 1 :

Un problème de tas

On dispose de 7 objets que l'on répartit en autant de tas que l'on veut, chaque tas contenant autant d'objets que l'on veut.
Une manipulation consiste à enlever un objet de chaque tas et à faire un nouveau tas des objets ainsi récupérés.

Exemple : une répartition possible au départ sera notée (4,3)
elle signifie qu'on a deux tas, l'un de 4 objets et l'autre de 3 objets
après une manipulation, on obtiendra donc la répartition (3,2,2)

Avertissement : on considère que les répartitions (4,3) et (3,4) sont identiques.
De même les répartitions (3,2,2), (2,3,2) et (2,2,3) sont identiques.

1. On place les 7 objets en un seul tas ; la répartition est donc (7).
Quelle répartition obtiendra-t-on après 3 manipulations ? Après 7 manipulations ? Après 11 manipulations ? Après 2007 manipulations ?

2. Ici, on ne connaît pas la répartition initiale, mais après 2007 manipulations, on obtient la répartition (4,2,1).
Indiquer toutes les répartitions initiales possibles.

3. Paul et Virginie jouent ensemble.
Au départ, Paul dispose les objets sans montrer la répartition à Virginie. Puis il simule sur son ordinateur 2007 manipulations et ne montre à Virginie que la répartition finale. Il demande alors à Virginie de deviner la répartition initiale.
Virginie réfléchit et avoue ne pas savoir répondre car elle hésite entre trois répartitions.
Sachant que Virginie a raisonné correctement, quelle répartition finale a-t-elle vue ?

Exercice 2 :

Des trapèzes de même aire

Le but de cet exercice est de déterminer les trapèzes rectangles qui, sous certaines conditions de distances et d'angles, sont partagés en deux trapèzes de même aire par une parallèle donnée à leurs bases.

1. Question préliminaire :

Existe-t-il un couple d'entiers naturels (m, p) tel que : $m^2 - p^2 = 8$?

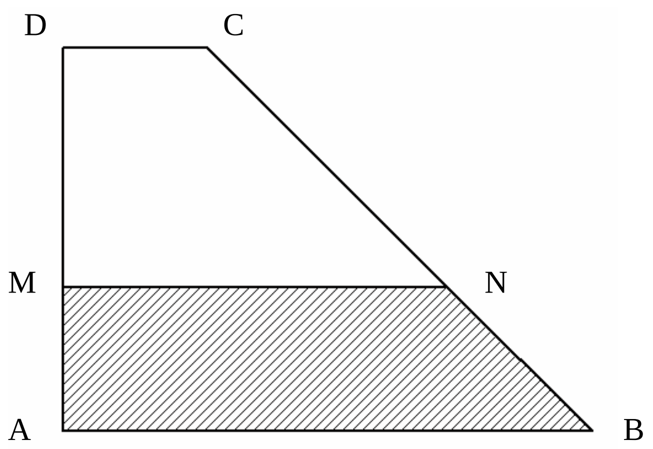
En existe-t-il plusieurs ?

(Le résultat de cette question peut être exploité dans la suite de l'exercice, selon la méthode utilisée pour la traiter).

2. On considère les trapèzes rectangles ABCD de bases $[\mathrm{AB}]$ et $[\mathrm{CD}]$ tels que :

- $\widehat{ABC} = 45°$
- les distances AB, AD et CD sont des nombres entiers, et AD > 2.

Soit M le point du segment $[\mathrm{AD}]$ tel que : $\mathrm{AM} = 2$



Déterminer les distances AB, AD et CD de sorte que les aires des trapèzes MNBA et MNCD soient égales.

Indication : On pourra faire apparaître sur la figure des triangles isocèles.

<u>Exercice 3 : (Concours S et STI)</u>

Au tour des triangles rectangles

1. Existe-t-il des triangles rectangles dont l'hypoténuse ait pour longueur 14 et dont les deux autres côtés aient pour mesure des nombres entiers ?

2. Déterminer tous les triangles rectangles dont les côtés ont des longueurs entières et dont un côté a pour longueur 14.

<u>Exercice 4 : (Concours S et STI)</u>

Fonction de …fonction de…

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Soit f_1 et f_n les fonctions définies pour tout $x \in \mathbf{R} - \{ 0 ; 1 \}$ par :

$$f_1(x) = 1 - \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$$

Calculer $f_{2\,007}(2\,007)$