Olympiades séries autres que S-STI

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

***

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

Exercice 1 :

Un problème de tas

On dispose de 7 objets que l'on répartit en autant de tas que l'on veut, chaque tas contenant autant d'objets que l'on veut.
Une manipulation consiste à enlever un objet de chaque tas et à faire un nouveau tas des objets ainsi récupérés.

Exemple : une répartition possible au départ sera notée (4,3)
elle signifie qu'on a deux tas, l'un de 4 objets et l'autre de 3 objets
après une manipulation, on obtiendra donc la répartition (3,2,2)

Avertissement : on considère que les répartitions (4,3) et (3,4) sont identiques.
De même les répartitions (3,2,2), (2,3,2) et (2,2,3) sont identiques.

1. On place les 7 objets en un seul tas ; la répartition est donc (7).
Quelle répartition obtiendra-t-on après 3 manipulations ? Après 7 manipulations ? Après 11 manipulations ? Après 2007 manipulations ?

2. Ici, on ne connaît pas la répartition initiale, mais après 2007 manipulations, on obtient la répartition (4,2,1).
Indiquer toutes les répartitions initiales possibles.

3. Paul et Virginie jouent ensemble.
Au départ, Paul dispose les objets sans montrer la répartition à Virginie. Puis il simule sur son ordinateur 2007 manipulations et ne montre à Virginie que la répartition finale. Il demande alors à Virginie de deviner la répartition initiale.
Virginie réfléchit et avoue ne pas savoir répondre car elle hésite entre trois répartitions.
Sachant que Virginie a raisonné correctement, quelle répartition finale a-t-elle vue ?

Exercice 2 :

Des trapèzes de même aire

Le but de cet exercice est de déterminer les trapèzes rectangles qui, sous certaines conditions de distances et d'angles, sont partagés en deux trapèzes de même aire par une parallèle donnée à leurs bases.

1. Question préliminaire :

Existe-t-il un couple d'entiers naturels (m, p) tel que : $m^2 - p^2 = 8$?

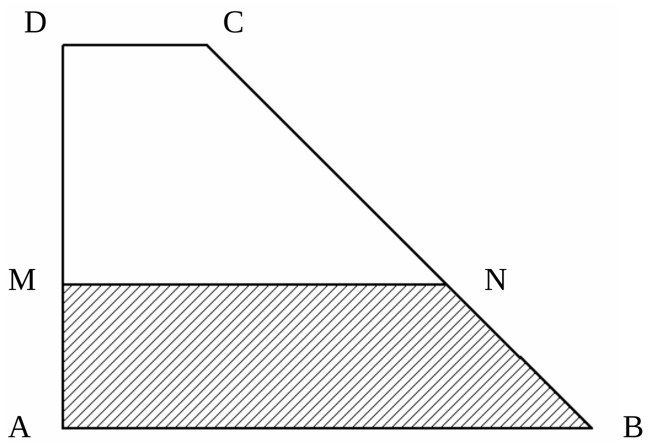
En existe-t-il plusieurs ?

(Le résultat de cette question peut être exploité dans la suite de l'exercice, selon la méthode utilisée pour la traiter).

2. On considère les trapèzes rectangles ABCD de bases $[AB]$ et $[CD]$ tels que :

- $\widehat{ABC} = 45°$
- les distances AB, AD et CD sont des nombres entiers, et AD > 2.

Soit M le point du segment $[AD]$ tel que : $AM = 2$



Déterminer les distances AB, AD et CD de sorte que les aires des trapèzes MNBA et MNCD soient égales.

<u>Indication</u> : *On pourra faire apparaître sur la figure des triangles isocèles.*

<u>Exercice 3 : (Concours L, ES, STG)</u>

Le jeu des petits pavés

Voici un jeu pour deux joueurs, utilisant une figure constituée de petits pavés juxtaposés (dans cet exemple 6×9 pavés : figure 1). Le premier joueur choisit l'un des 54 pavés, par exemple celui marqué « a » sur la figure 2, et l'enlève ainsi que tous les pavés situés au-dessus et à sa droite.

Figure 1 :

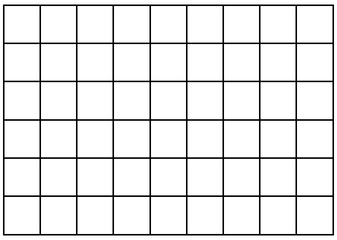
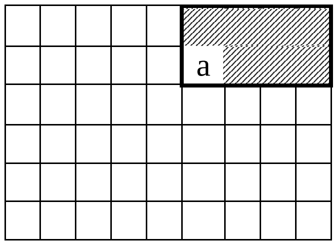
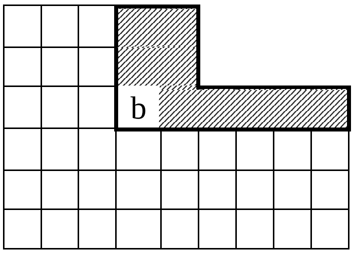


Figure 2 :



Le deuxième joueur choisit alors l'un des pavés qui n'ont pas été enlevés, par exemple le pavé marqué « b » sur la figure 3, et l'enlève ainsi que tous les pavés situés au-dessus et à sa droite.

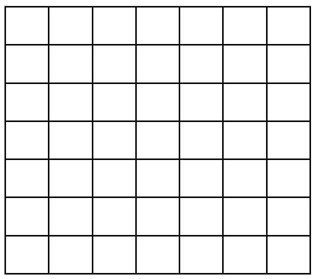
Figure 3 :



C'est ensuite au tour du premier joueur de choisir un des pavés restants puis de l'enlever ainsi que tous les pavés situés au-dessus et à sa droite. Le jeu se poursuit ainsi, jusqu'à ce qu'un joueur enlève le pavé inférieur gauche et, ce faisant, perde la partie.

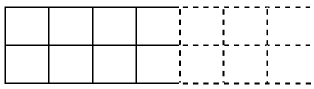
Première étude :

1. On considère la figure suivante constituée de 7×7 petits pavés juxtaposés. L'un des joueurs a-t-il les moyens de gagner à tout coup ?



2. Peut-on généraliser cette réponse dans les cas où la figure est formée de $n \times n$ pavés, avec n un nombre entier supérieur ou égal à 2 ?

Seconde étude : On considère la figure formée par $2 \times n$ petits pavés juxtaposés.
L'un des joueurs peut-il gagner à tout coup ?



<u>Exercice 4 : (Concours L, ES, STG)</u>

Histoire de montre…

Aujourd’hui, 14 mars 2007, à 8h00, une montre donnait l’heure exacte.

On sait que pendant les douze heures à venir, elle avancera d’un quart de minute par rapport à l’heure réelle, puis pendant les douze heures suivantes (parce qu’elle est moins secouée…), elle retardera d’un tiers de minute par rapport à l’heure réelle. Ce processus se répètera tous les jours suivants.

1. À quelle date et à quelle heure sera-t-elle pour la première fois en retard de deux minutes sur l’heure réelle ?
2. À partir de quelle date et à quelle heure, la montre retardera-t-elle toujours de plus de deux minutes sur l’heure réelle ?