OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Classes de premières (séries S et STI)

Concours 2008

♦ ♦ ♦

Mercredi 12 Mars 2008

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

♦ ♦ ♦

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

Exercice numéro 1

Les bons nombres

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.
On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».

Ainsi, par exemple :

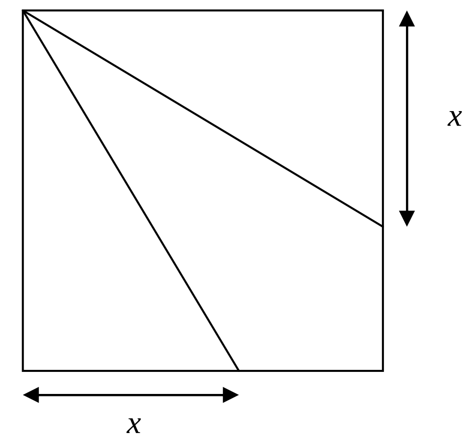
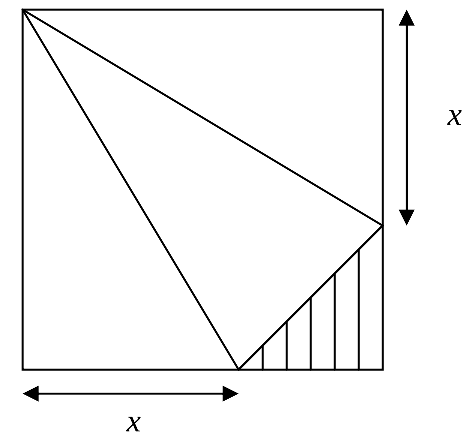
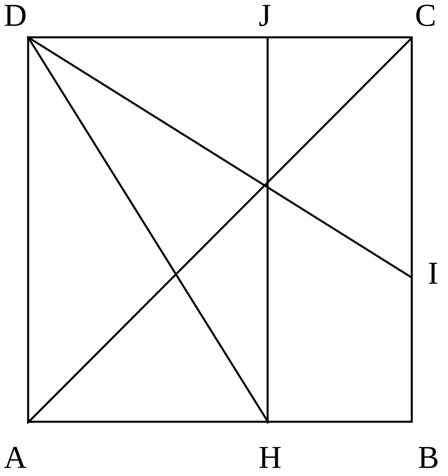
$2 = 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$, donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant 1+1).

$3 = 1 + 2$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \neq 1$; $3 = 1 + 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$; donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».
2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».
3. Montrer que si n est « bon », alors $2n + 2$ et $2n + 9$ sont « bons ».
4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».
   Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

Exercice numéro 2

Un partage équitable

	1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre. Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?
	2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires. Peuvent-elles avoir la même aire ?
	3. Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB). Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes. Qu'en est-il ?

Exercice numéro 3 (concours S et STI)

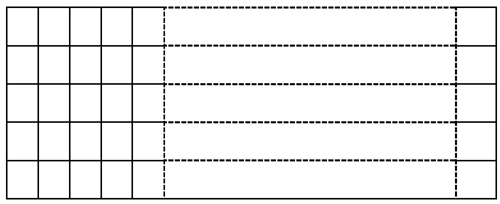
<u>Une mosaïque en or</u>

Un rectangle d'or est un rectangle tel que le rapport $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ soit égal à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ce nombre étant appelé « Nombre d'or » et noté ϕ (la lettre « phi » de l'alphabet grec).
Le rapport $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ est appelé « format », pour tout rectangle.

1. La carte de retrait d'une banque est inscrite dans un rectangle de dimensions 8,5 cm par 5,4 cm alors que la carte de visite de ses conseillers est rectangulaire de longueur 8,95 cm et de largeur 5,5 cm.

Calculer le format de ces rectangles. Laquelle des deux cartes est celle dont le format est le plus proche du nombre d'or ?

2. Une ville souhaite mettre en valeur une grande façade de forme rectangulaire située en entrée d'agglomération.
On dispose pour cela de 2008 pavés colorés de forme carrée d'un mètre de côté. Ils permettront de faire réaliser une mosaïque rectangulaire par juxtaposition continue de ces carrés.



La forme obtenue est un rectangle « sans trou ».

Peut-on former un rectangle d'or avec l'ensemble des 2008 pavés ?
Et avec un nombre quelconque de pavés entiers ?

3. Les services techniques de la ville proposent de réaliser une mosaïque dont les dimensions sont les valeurs approchées entières d'un rectangle d'or d'aire 2008 m² et ce, en utilisant un maximum des 2008 pavés colorés.

Quel est le format du rectangle proposé et combien reste-t-il de pavés inutilisés ?

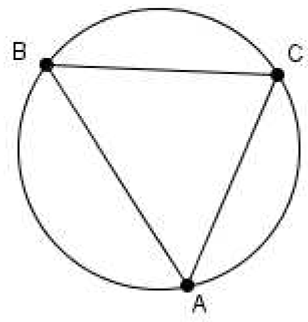
4. Le service culturel souhaite que la mosaïque réalisée ait une longueur comprise entre 50 et 60 mètres. Déterminer alors les dimensions de la mosaïque dont le format est le plus proche de ϕ.

Combien reste-t-il alors de pavés inutilisés ?

Exercice numéro 4 (concours S et STI)

Cercle et régions

Soit un cercle (C). On place des points distincts deux à deux sur ce cercle, et on trace tous les segments joignant ces points deux à deux. Les points sont choisis de telle manière que jamais trois segments ne sont concourants en un même point dans le disque. Ces segments déterminent sur le disque des régions. Par exemple, avec trois points A, B et C on obtient quatre régions.



Combien obtient-on de régions avec quatre points ?
Avec cinq points ?
Avec six points ?
Avec sept points ?
Expliciter une méthode permettant de dénombrer le nombre de régions supplémentaires obtenues en rajoutant un huitième point, puis un neuvième.
Peut-on généraliser ?