OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Classes de premières (séries ES, L, STG et STL)

Concours 2008

♦ ♦ ♦

Mercredi 12 Mars 2008

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

♦ ♦ ♦

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

Exercice numéro 1

Les bons nombres

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.
On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».

Ainsi, par exemple :

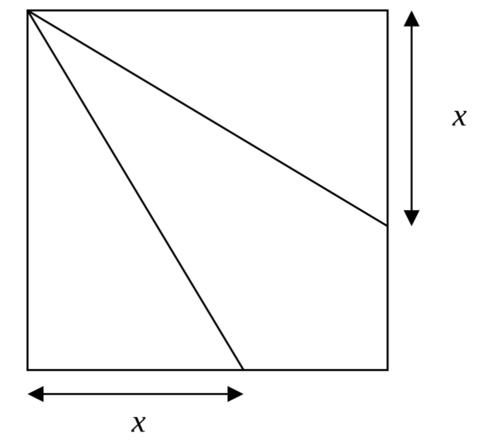
$2 = 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$, donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant 1+1).

$3 = 1 + 2$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \neq 1$; $3 = 1 + 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$; donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».
2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».
3. Montrer que si n est « bon », alors $2n + 2$ et $2n + 9$ sont « bons ».
4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».
   Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

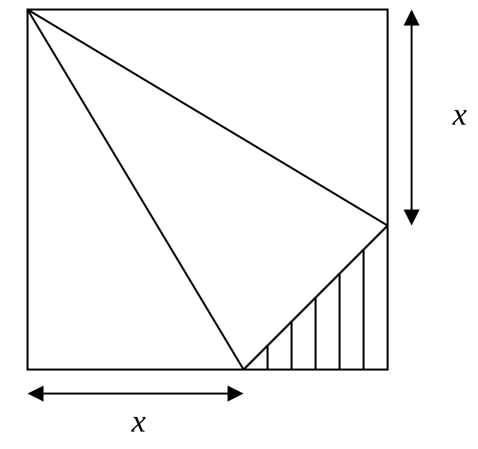
Exercice numéro 2

Un partage équitable



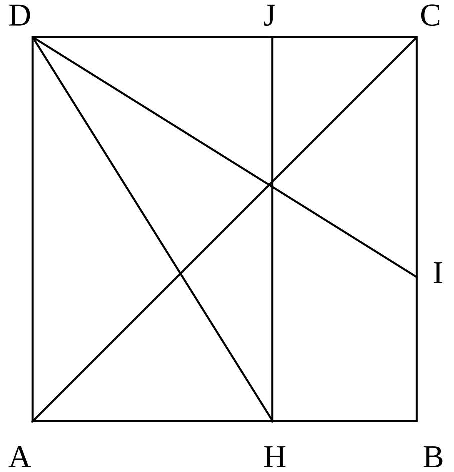
1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.

Quelle valeur doit-il donner à *x* pour arriver à ses fins ?



2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.

Peuvent-elles avoir la même aire ?



3. Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB).
Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.

Qu'en est-il ?

Exercice numéro 3 (concours ES, L, STG et STL)

Nombres pratiques

Un entier *n* est dit **pratique** si tout entier non nul inférieur ou égal à *n* est soit un diviseur de *n*, soit peut s'écrire comme somme de certains diviseurs **distincts** de *n*.

Par exemple, 6 a pour diviseurs : 1, 2, 3, 6 et 4 = **3** + **1,** 5 = **3** + **2 ;** 6 est donc un nombre pratique.

1. Montrer que 8 est un nombre pratique et donner un nombre non pratique.
2. Montrer que 48 est un nombre pratique.
3. Plus généralement, montrer que le produit de 2 nombres pratiques est un nombre pratique.

Exercice numéro 4 (concours ES, L, STG et STL)

Monnaie

À l'entrée d'une kermesse, un enfant demande à la personne qui tient la caisse de lui faire de la monnaie de son billet de 10 €.
Dans la caisse, il n'y a que des pièces de 10 centimes, 20 centimes et 50 centimes.
Chaque jeu auquel il peut jouer est desservi par un distributeur dans lequel on ne peut mettre qu'une seule pièce par jeu.
Il veut essayer au moins une fois chaque jeu.

Les trois jeux sont :
la tombola à 20 centimes ;
le rasage de ballon à 10 centimes ;
le chamboule tout à 50 centimes.

Il veut faire 10 fois plus de rasages de ballon que de tombola.

Combien la caissière lui donne-t-elle de pièces de chaque sorte ?