OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Classes de premières (séries S et STI)

Concours 2009

♦ ♦ ♦

Mercredi 11 Mars 2009

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

♦ ♦ ♦

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

Exercice numéro 1

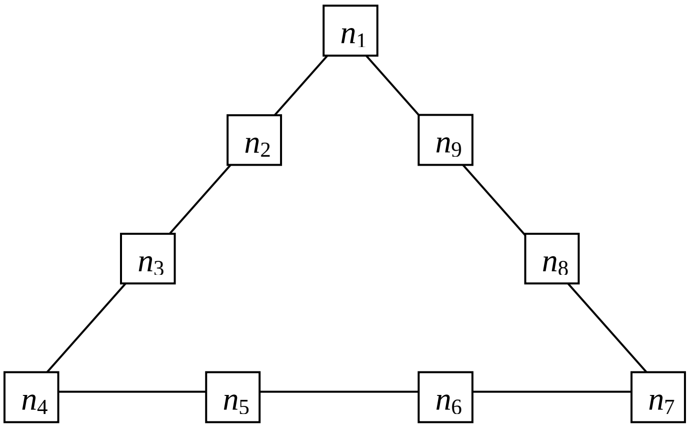
Exercice 1

Partie A : Questions préliminaires :

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.
1- Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
2- Quelle la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B : Les triangles magiques :

On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

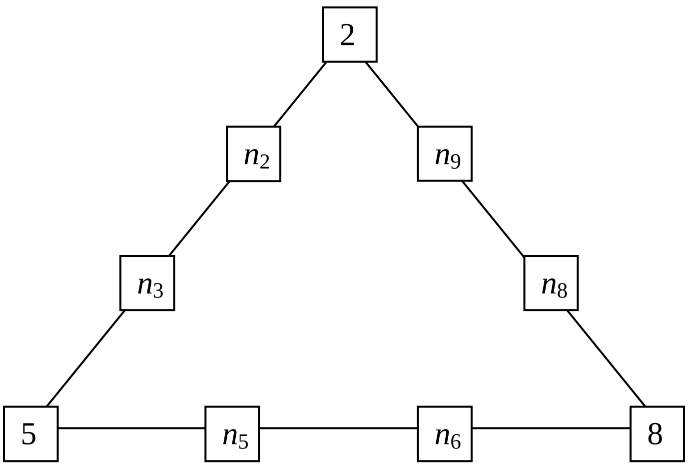


Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur S, on dit que le triangle est S-magique.

(C'est à dire si : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = S$)

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de S.

1- Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S-magique de somme $S = 20$.



2- On considère un triangle S-magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.

   a. Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.
   b. En déduire qu'on a $17 \leq S \leq 23$
   c. Donner la liste des couples (S , T) ainsi envisageables.

3- Proposer un triangle 17-magique.

4- Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.

5- **a.** Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.
   b. Proposer un triangle 19-magique.

6- Prouver que, s'il existe un triangle S-magique, alors il existe aussi un triangle $(40 - S)$ -magique.

7- Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S-magique ?

Exercice numéro 2

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.

<u>On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange</u> (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).

L'unité de longueur choisie est le centimètre.

1- Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur $L = 16$ et de largeur $l = 8$.

On pourra noter c la longueur du côté du losange.

Les questions suivantes sont indépendantes.

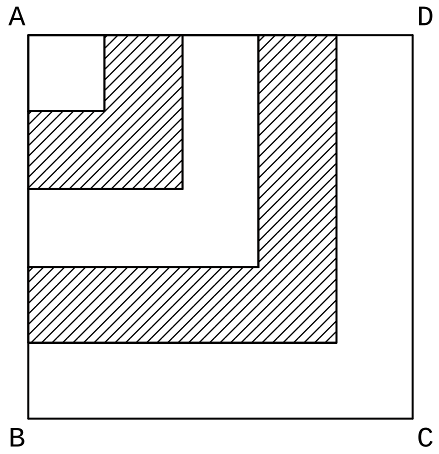
2- Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du coté du losange.

3- On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers.
Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?

4- À partir d'une feuille de longueur L, on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ.
Exprimer, en fonction de L, la largeur l de la feuille de départ.

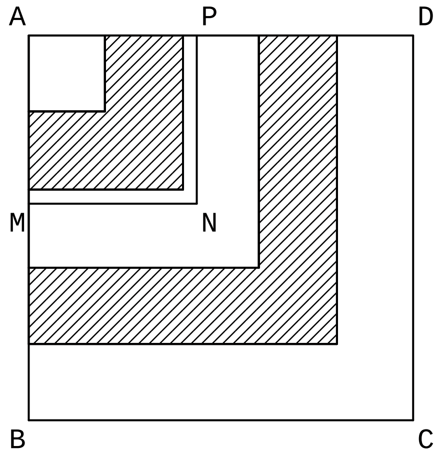
5- Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.

Exercice numéro 3 (concours S et STI)



Paul possède un carré ABCD de 50 mm de côté qui présente des rayures comme sur la figure ci-contre : le premier carré a 10 mm de côté, la première bande rayée complète le carré pour en faire un carré de 20 mm de côté, la deuxième bande, non rayée, le complète pour en faire un carré de 30 mm de côté ...

Paul propose à son ami Antoine un jeu. Paul choisit les surfaces rayées, Antoine prend donc les surfaces blanches.
Antoine tire au hasard un nombre entier de 1 à 49 sur le principe du loto.
On appelle x le nombre tiré. On appelle M le point de [AB] tel que AM = x (x est la mesure en mm du côté AM), et P le point de [AD] tel que AMNP soit un carré.
Le territoire de Paul est la partie à rayures à l'intérieur du carré AMNP.
Le territoire d'Antoine est la partie blanche à l'intérieur du carré AMNP.
Le gagnant est celui dont l'aire du territoire est la plus grande.



1°) a) Antoine a tiré 8. Qui est le gagnant ?
b) Antoine a tiré 16. Qui est le gagnant ?
c) Antoine a tiré 21. Qui est le gagnant ?
d) Antoine a tiré 26. Qui est le gagnant ?
e) Antoine a tiré 36. Qui est le gagnant ?

2°) Déterminer toutes les valeurs de x qui permettent à Paul de gagner.

Exercice numéro 4 (concours S et STI)

La **persistance** d'un nombre non nul est le **nombre minimal** de fois où on applique une procédure à l'ensemble des chiffres de ce nombre pour le réduire à un chiffre entre 0 et 9, appelé **résidu**.
Ainsi, la persistance additive consiste à additionner les chiffres et à compter le nombre minimal d'étapes pour obtenir un chiffre entre 0 et 9, appelé le résidu.
De même pour la persistance multiplicative :
A partir d'un entier non nul *n*, on multiplie les chiffres qui le composent pour obtenir un deuxième entier que l'on décompose également pour en faire le produit de ses chiffres. On continue le procédé jusqu'à ce que l'on obtienne un chiffre entre 0 et 9. Ce dernier chiffre étant appelé le résidu.

> Ainsi 637 devient $6\times3\times7 = 126$ qui devient à son tour $1\times2\times6 = 12$ puis $1\times2 = 2$.
> 2 est le résidu et la persistance multiplicative de 637 est 3.

Partie 1 : persistance additive :

a) Quel est le plus petit entier *n* de persistance additive 1 ? 2 ?
b) Montrer que le plus petit entier *n* de persistance additive 3 est 199.
c) Quel est le lien entre les deux plus petits entiers de persistance additive *k* et *k* + 1?
En déduire le plus petit entier de persistance additive 4.
d) Montrer que le résidu additif d'un produit de deux nombres entiers est égal au produit des résidus additif de ces deux nombres.

Partie 2 : persistance multiplicative :

a) Montrer que la persistance multiplicative de 2468 est 0.
b) Quel est le plus petit entier *n* de persistance multiplicative 1 ? 2 ? 3 ?
c) Le nombre détapes pour calculer la persistance multiplicative d'un entier quelconque peut-il devenir infini ?
d) le résidu multiplicatif d'un produit de deux nombres entiers est égal au produit des résidus multiplicatifs de ces deux nombres ?