académie
Rouen

MINISTÈRE DE
L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE
L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Classes de premières (séries ES, L, STG et STL)

Concours 2009

♦ ♦ ♦

Mercredi 11 Mars 2009

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

♦ ♦ ♦

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

Exercice numéro 1

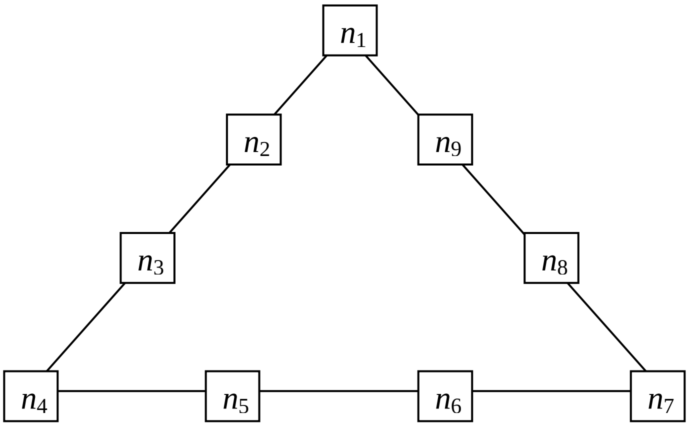
Exercice 1

Partie A : Questions préliminaires :

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.
1- Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
2- Quelle la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B : Les triangles magiques :

On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

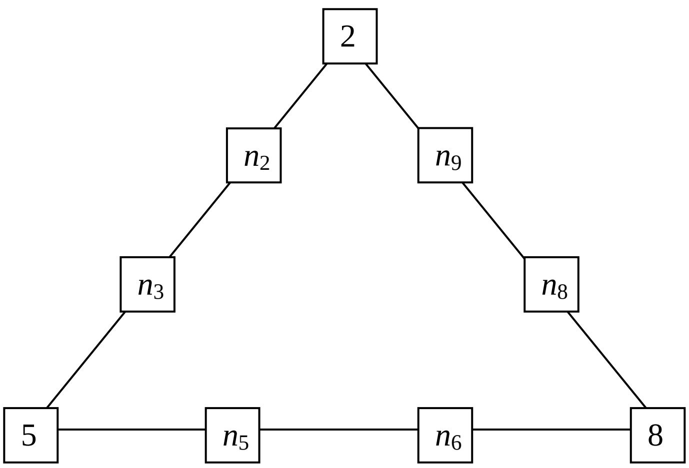


Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur S, on dit que le triangle est S-magique.

(C'est à dire si : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = S$)

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de S.

1- Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S-magique de somme $S = 20$.



2- On considère un triangle S-magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.

a. Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.
b. En déduire qu'on a $17 \leq S \leq 23$
c. Donner la liste des couples $(S\ ,\ T)$ ainsi envisageables.

3- Proposer un triangle 17-magique.

4- Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.

5- **a.** Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.
b. Proposer un triangle 19-magique.

6- Prouver que, s'il existe un triangle S-magique, alors il existe aussi un triangle $(40 - S)$ -magique.

7- Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S-magique ?

Exercice numéro 2

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.

<u>On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange</u> (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).

L'unité de longueur choisie est le centimètre.

1- Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur $L = 16$ et de largeur $l = 8$.

On pourra noter c la longueur du côté du losange.

Les questions suivantes sont indépendantes.

2- Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du coté du losange.

3- On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers.
Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?

4- À partir d'une feuille de longueur L, on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ.
Exprimer, en fonction de L, la largeur l de la feuille de départ.

5- Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange

Exercice numéro 3 (concours ES, L, STG et STL)

On appelle N l'entier obtenu en écrivant à la suite tous les entiers de 1 à 2009.
N = 12345679891011121……………032004200520062007200820 09.

1. Trouver l'entier k tel que 10^k soit la puissance de 10 la plus proche de N.
2. N est-il divisible par 9 ?

Exercice numéro 4 (concours ES, L, STG et STL)

Un nombre premier est un entier naturel (positif) qui n'est divisible que par 1 et lui-même.
1 n'est pas premier. Tout entier peut s'écrire de façon unique comme produit de nombres premiers.

Etant donné un entier naturel $n \geq 2$, on construit une suite de nombres issue de n:

- A l'étape 0, le nombre qui débute la suite est n ;
- A chaque étape, on calcule la somme des facteurs premiers du nombre de l'étape précédente. Si le nombre trouvé est premier, la suite se stabilise sur cette valeur.

Exemple : Si n=15, la suite issue de 15 est : (15 ; 8 ; 6 ;5 ;5 ; 5 ;….) :
15=3×5 donc le suivant est 3+5=8. 8 = 2^3 donc le suivant est 2+2+2=6(on additionne 2 trois fois à cause de la puissance 3 de 2^3). 6=2×3 donc le suivat est 5, qui est premier, lasuite se stabilise sur 5.

E(*n*) est le numéro de l'étape à partir de laquelle la suite issue de n se stabilise(on commence à l'étape 0). **v(*n*)** est la valeur sur laquelle se stabilise la suite issue de n.
Ainsi E(15) = 3 et v(15) = 5.

1. Montrer que E(2009) = v(2009) = 5. Ainsi 2009 est un entier n qui vérifie E(n) = 5 et v(n) = 5.
2. Expliquer pourquoi 5 est le plus petit entier k pour lequel on puisse trouver au moins un nombre n tel que E(n)=k et v(n) = k
3. Des nombres premiers sont **jumeaux** s'ils différent de 2. Ainsi 11 et 13 sont premiers jumeaux. Calculer E(n) et v(n) si n = 2p où p est un entier premier jumeau avec p+2.