académie Rouen

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Classes de premières (séries S et STI)

Concours 2010

♦ ♦ ♦

Mercredi 10 Mars 2010

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

♦ ♦ ♦

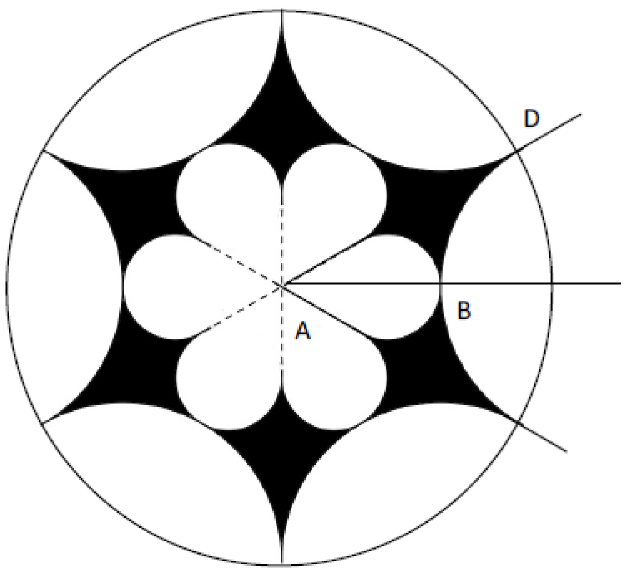
Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

Exercice numéro 1

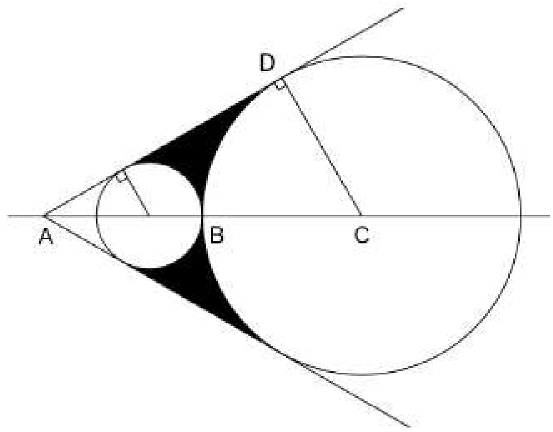
La Rosace

Un architecte cherche à intégrer une rosace particulière dans le bâtiment dont il étudie actuellement les plans. Voici son idée : la rosace a été tracée à partir du motif ci-dessous construit à l'aide de deux cercles.

Rosace



Motif :



1. Dans le motif ci-dessus, quelle est la mesure de l'angle formé par les tangentes aux cercles issues de A ?

2. *a*. Montrer que $AB = BC$.

   b. Comment le rayon du plus grand des deux cercles s'exprime-t-il en fonction du rayon du plus petit des deux cercles ?

   c. D'après ses plans, l'architecte souhaite inscrire sa rosace dans un disque de rayon $3\sqrt{3}$.

   Comment doit-il alors choisir le rayon de chacun des cercles du motif ?

3. On suppose que le petit cercle a un diamètre égal à une unité. Quelle est l'aire de la partie colorée de la rosace ?

Exercice Numéro 2

A la recherche du « chaînonze ».

On rappelle le critère de divisibilité par 11 d'un nombre inférieur à 999 :
« Un nombre inférieur à 999 est divisible par 11 si et seulement si la somme du chiffre des centaines et des unités moins le chiffre des dizaines vaut 0 ou 11».
Ainsi 759 et 99 sont divisibles par 11 car 7 + 9 – 5 = 11 et 0 + 9 – 9 = 0.

On appelle **chaînonze** une chaîne de chiffres telle que tout nombre formé de trois termes consécutifs de la chaîne est divisible par onze.
Par exemple « 7 5 9 4 » est un chaînonze car 759 et 594 sont divisibles par 11.

1. Quel chiffre peut-on ajouter **à droite** de la chaîne « 7 5 9 4 » pour la prolonger en un chaînonze ?

2. Prolonger par la droite le chaînonze « 7 5 9 4 » en un chaînonze de 12 chiffres.
   Peut-on le prolonger ainsi indéfiniment ? Quel serait alors le 2010^{e} chiffre ?

On envisage de partir d'une chaîne de deux chiffres et de la prolonger par la droite en un chaînonze le plus long possible.

3. Prolonger par la droite les chaînes « 0 9 » et « 9 1 ». Que constatez-vous?

On appelle ***chaînonze fini*** un chaînonze qui au bout d'un nombre fini d'opérations ne peut plus se prolonger.
On appelle ***chaînonze n-périodique*** un chaînonze infini constitué d'une séquence de *n* chiffres se répétant indéfiniment.

4. On considère la chaîne « *a b* » où *a* et *b* sont deux chiffres. On veut savoir si cette chaîne est prolongeable en un chaînonze de **trois** chiffres et, auquel cas, si un tel prolongement est unique.

   a. Etudier le cas particulier « *a a* ».

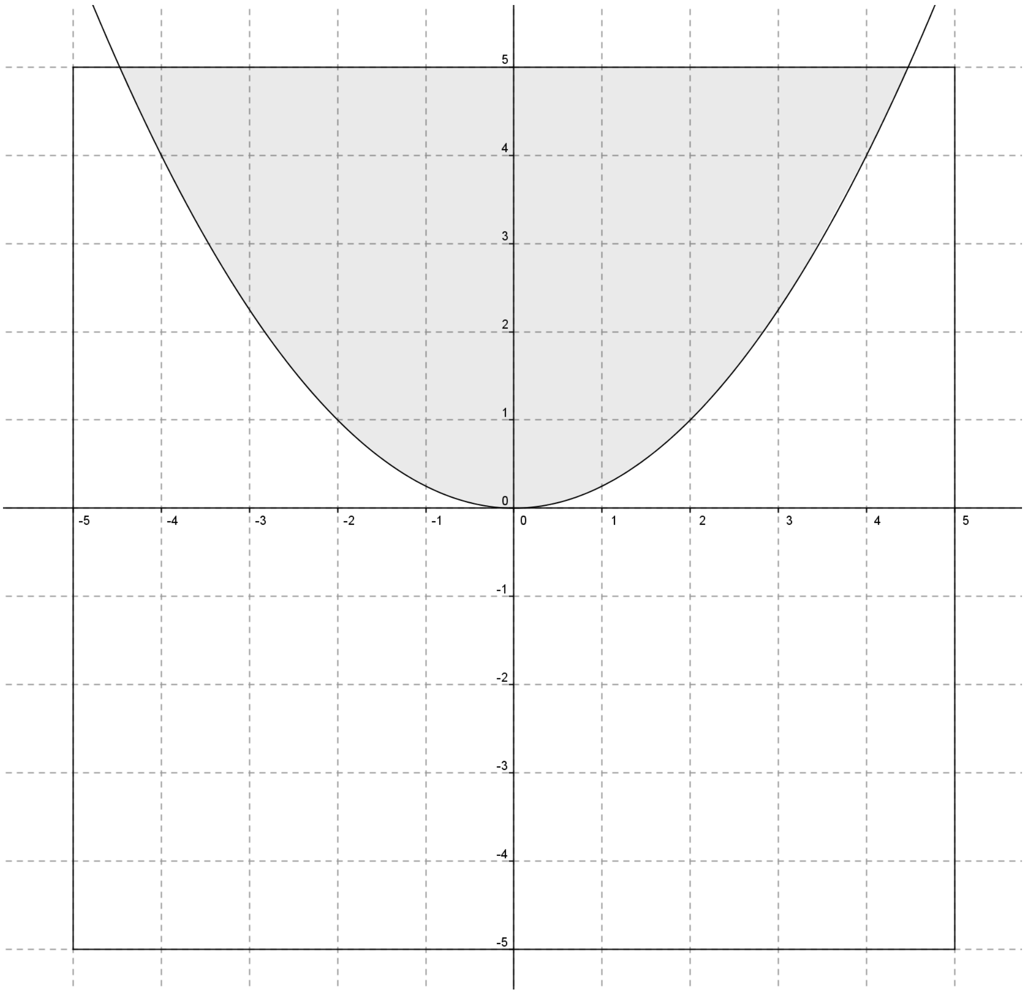
   b. Etudier le cas $b = a - 1$.

   c. Etudier les autres cas.

Montrer qu'en prolongeant la chaîne « *a b* » autant que faire se peut, le chaînonze obtenu est soit fini, soit 6-périodique.

Exercice Numéro 3

On a tracé ci-dessous la courbe représentative, dans un repère orthonormal d'unité 1 cm, de la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, pour tout x réel. La lecture d'informations sur ce graphique pourra être utile dans la suite de ce problème.



Soit (E) l'équation $x^2 + bx + c = 0$

1) Montrer que l'équation (E) admet deux solutions distinctes si, et seulement si, $c < \frac{1}{4}b^2$.

   Décrire, dans ce cas, la position du point M de coordonnées $(b\,;\,c)$ par rapport à la courbe de la fonction f tracée dans le repère ci-dessus.

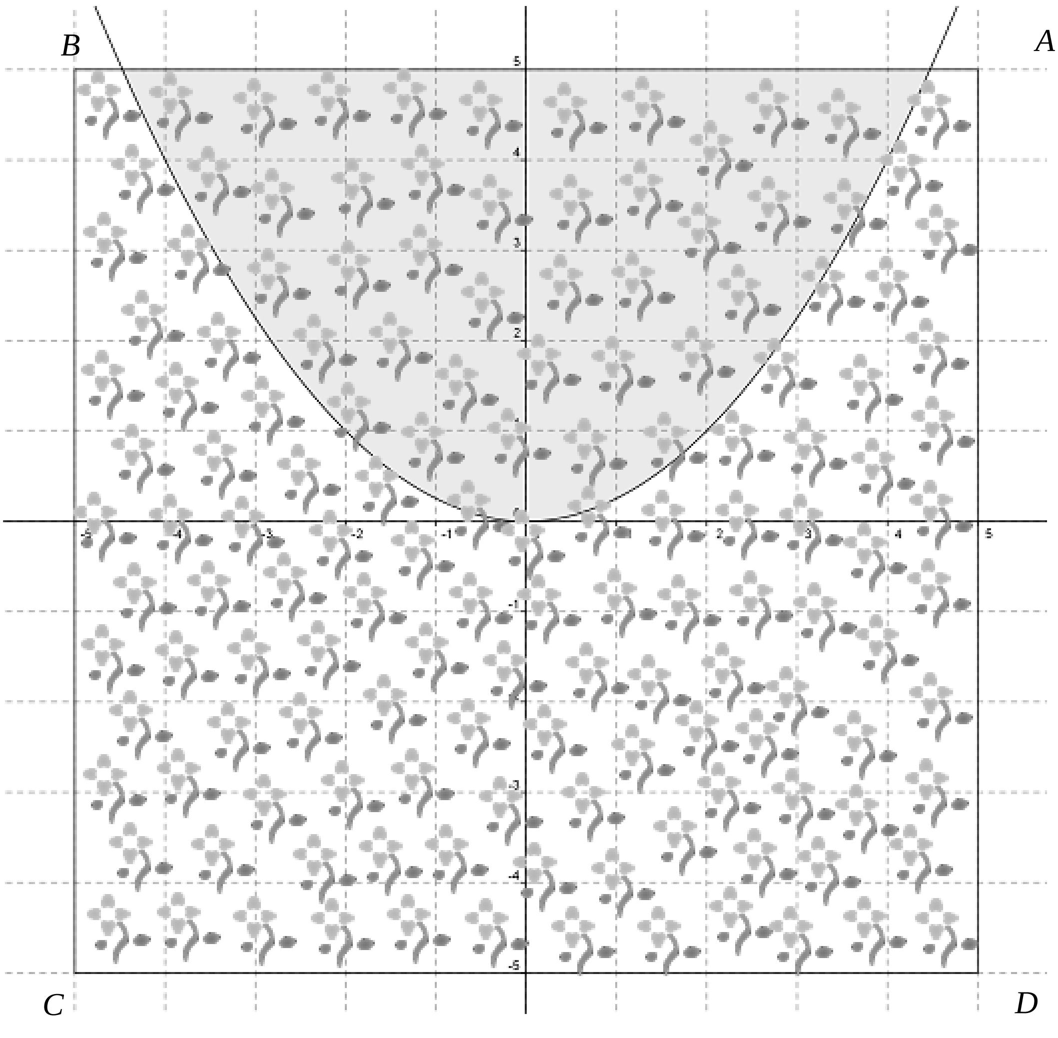
2) Dans une urne contenant 11 boules indiscernables au toucher, numérotées de -5 à 5, on tire au hasard une boule dont on note le numéro que l'on remet dans l'urne puis on tire une seconde boule dont on note également le numéro. b prend comme valeur le numéro porté par la première boule et c prend comme valeur celle de la deuxième boule de façon à constituer les coefficients de l'équation (E).

   Soit A l'événement "l'équation (E) possède deux solutions distinctes" et B "l'équation (E) possède une unique solution". Déterminer, à l'aide du graphique ci-dessus, $P(A)$ et $P(B)$.

3) On suppose désormais que les coefficients b et c de l'équation (E) sont obtenus aléatoirement dans l'intervalle [-5;5].
   a. Encadrer l'aire du domaine colorié sur le repère ci-dessus entre deux entiers.

On considèrera dans la suite comme valeur approchée de cette aire la moyenne de ces deux entiers.

   b. Evaluer $P(A)$ et $P(B)$ dans le cadre de cette expérience.
   c. Un jardinier a décoré de fleurs un terrain de forme carrée (comme $ABCD$ ci-dessous) contenant une partie parabolique correspondant à la partie colorée. Il a planté des centaines de fleurs uniformément sur ce terrain carré. Donner un moyen au jardinier de retrouver l'aire de la surface colorée.



Exercice Numéro 4

Cartes de Janus

Dans un jeu de 32 cartes, il y a quatre couleurs : trèfle, carreau, cœur et pique. Ces couleurs vont par deux : on dit que

- cœur et pique se ressemblent ;
- carreau et trèfle se ressemblent ;
- carreau et pique sont complémentaires ;
- cœur et trèfle sont complémentaires.

Dans chacune de ces couleurs, il y a 8 hauteurs de carte, qui sont dans l'ordre croissant
7, 8, 9, 10, V, D, R, A(A signifie as).
Les hauteurs complémentaires sont

- la première et la dernière
- la deuxième et l'avant dernière
- etc.

On décide de fabriquer un nouveau jeu de 32 cartes, toutes différentes, en collant dos à dos, deux jeux de 32 cartes des deux façons suivantes :

- La première façon est de coller deux cartes de même hauteur avec des couleurs qui se ressemblent (mais pas identiques), on appelle ces cartes ci les cartes parallèles. Par exemple, une face 7♥et une face 7♠. On note cette carte 7♥/7♠.
- La deuxième façon est de coller deux cartes de hauteurs complémentaires avec des couleurs complémentaires, on appelle ces cartes là les cartes complémentaires. Par exemple, une face 7♥et une face A♣. On note cette carte 7♥/A♣.

Le jeu de cartes ainsi fabriqué s'appelle le jeu de Janus, il a été inventé en 1988 par Roland Yéléhada.

1. Enumérer toutes les cartes de Janus.

Le jeu des mariages consiste à former des paires de cartes rigoureusement identiques (hauteur et couleur). On étale les 32 cartes de Janus sur la table. . Chaque joueur prend à tour de rôle une paire parfaite, par exemple deux valets de cœur, tant que c'est possible. Quand il n'y en a plus, le joueur retourne une seule carte :

- s'il a créé une paire parfaite, il la prend puis c'est au tour du joueur suivant,
- s'il n'a créé aucune paire parfaite, il ne prend rien, laisse la carte retournée et c'est au tour du joueur suivant.

Les cartes retirées ne sont pas retournées pour qu'on ne voie pas ce qu'il y a au dos.
Le joueur qui gagne est celui qui a retiré le plus de paires parfaites.

On joue pour le moment avec 4 cartes de Janus : 7♥/7♠ 7♥/A♣ A♦/A♣ A♦/7♠.
Maud joue contre son Papy. C'est toujours elle qui commence la partie.

2. Y a-t-il une partie dans laquelle Maud ne ramasse pas une paire parfaite au premier tour ?

On joue maintenant avec toutes les 32 cartes.
Maud joue en second et c'est à elle de jouer. Il y a un roi de carreau visible, elle cherche le deuxième roi de carreau. Est-il obligatoire que le deuxième roi de carreau se trouve encore sur la table ?
Quelle(s) carte(s) peut –elle retourner pour le trouver s'il est encore là ? Sur quelle(s) autre(s) carte(s) risque-t-elle de tomber ?