Olympiades académiques de Mathématiques

Classes de premières (séries ES, L, STG et STL)

Concours 2010

♦ ♦ ♦

Mercredi 10 Mars 2010

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

♦ ♦ ♦

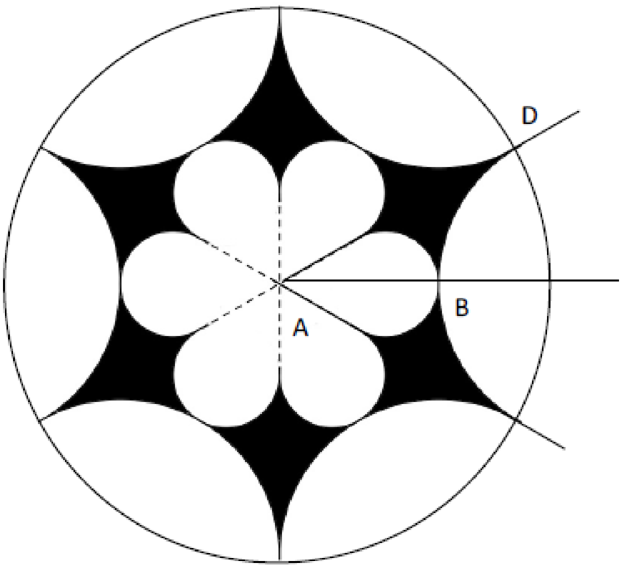
Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

Exercice numéro 1

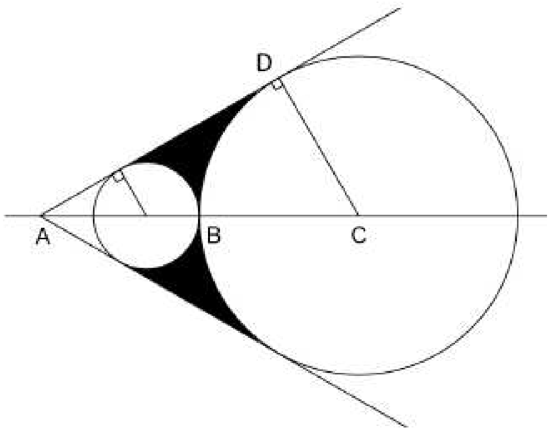
La Rosace

Un architecte cherche à intégrer une rosace particulière dans le bâtiment dont il étudie actuellement les plans. Voici son idée : la rosace a été tracée à partir du motif ci-dessous construit à l'aide de deux cercles.

Rosace



Motif :



1. Dans le motif ci-dessus, quelle est la mesure de l'angle formé par les tangentes aux cercles issues de A ?

2. *a*. Montrer que $AB = BC$.

   b. Comment le rayon du plus grand des deux cercles s'exprime-t-il en fonction du rayon du plus petit des deux cercles ?

   c. D'après ses plans, l'architecte souhaite inscrire sa rosace dans un disque de rayon $3\sqrt{3}$.

   Comment doit-il alors choisir le rayon de chacun des cercles du motif ?

3. On suppose que le petit cercle a un diamètre égal à une unité. Quelle est l'aire de la partie colorée de la rosace ?

Exercice Numéro 2

A la recherche du « chaînonze ».

On rappelle le critère de divisibilité par 11 d'un nombre inférieur à 999 :
« Un nombre inférieur à 999 est divisible par 11 si et seulement si la somme du chiffre des centaines et des unités moins le chiffre des dizaines vaut 0 ou 11».
Ainsi 759 et 99 sont divisibles par 11 car 7 + 9 – 5 = 11 et 0 + 9 – 9 = 0.

On appelle **chaînonze** une chaîne de chiffres telle que tout nombre formé de trois termes consécutifs de la chaîne est divisible par onze.
Par exemple « 7 5 9 4 » est un chaînonze car 759 et 594 sont divisibles par 11.

1. Quel chiffre peut-on ajouter **à droite** de la chaîne « 7 5 9 4 » pour la prolonger en un chaînonze ?

2. Prolonger par la droite le chaînonze « 7 5 9 4 » en un chaînonze de 12 chiffres.
   Peut-on le prolonger ainsi indéfiniment ? Quel serait alors le 2010^{e} chiffre ?

On envisage de partir d'une chaîne de deux chiffres et de la prolonger par la droite en un chaînonze le plus long possible.

3. Prolonger par la droite les chaînes « 0 9 » et « 9 1 ». Que constatez-vous?

On appelle ***chaînonze fini*** un chaînonze qui au bout d'un nombre fini d'opérations ne peut plus se prolonger.
On appelle ***chaînonze n-périodique*** un chaînonze infini constitué d'une séquence de *n* chiffres se répétant indéfiniment.

4. On considère la chaîne « *a b* » où *a* et *b* sont deux chiffres. On veut savoir si cette chaîne est prolongeable en un chaînonze de **trois** chiffres et, auquel cas, si un tel prolongement est unique.

   a. Etudier le cas particulier « *a a* ».

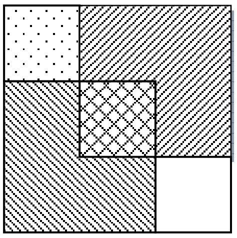
   b. Etudier le cas $b = a - 1$.

   c. Etudier les autres cas.

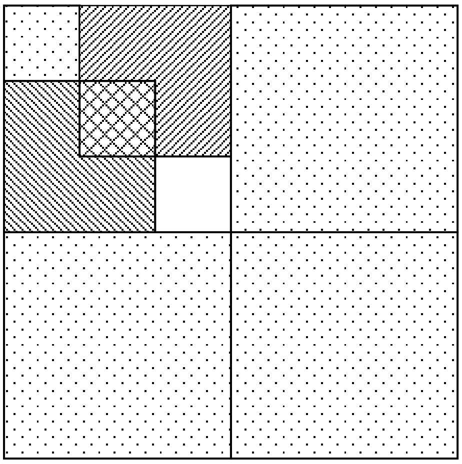
Montrer qu'en prolongeant la chaîne « *a b* » autant que faire se peut, le chaînonze obtenu est soit fini, soit 6-périodique.

Exercice Numéro 3

1°) a)Montrer que $1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2$. On appelle cette égalité E_2.
b) Expliquer pourquoi le dessin ci-dessous permet de justifier cette égalité.



2°) a)Montrer que $1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$. On appelle cette égalité E_3.
b) Expliquer pourquoi le dessin ci-dessous permet de justifier cette égalité.



3°) Quels dessins pourraient justifier les égalités :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + (1 + 2 + 3 + 4)^3$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^3$$

Exercice Numéro 4

Un QCM de mathématiques est composé de 5 questions. Pour chaque question, une bonne réponse rapporte 4 points, une réponse fausse retire 2 points et une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif, la note finale attribuée au QCM est 0.
A l'issue de ce QCM, quatre candidats, Alex, Benjamin, Camille et Delphine ont obtenu la note 0.

Déterminer, pour chacun de ces candidats, le nombre de réponses fausses et le nombre de bonnes réponses sachant que :

- Chacun a rendu un QCM différent de celui de ses trois autres camarades.
- Alex a eu autant de bonnes réponses que d'absence de réponse.
- Très joueur, Benjamin ne s'est jamais abstenu de répondre.
- Camille et Delphine ont répondu correctement aux mêmes nombres de questions.
- Alex s'est abstenu autant de fois que Delphine qui s'est montrée plus audacieuse que Camille.