Urbicandologie

Suites, algorithme et calcul formel

Dans la BD *La fièvre d'Urbicande**, la célèbre cité obscure est aux prises avec l'évolution d'un mystérieux réseau cubique.

Issu d'un cube unique dont les arêtes croissent en créant de nouveaux cubes, le réseau grandit jour après jour.
L'urbatecte Eugen Robick tente de prévoir l'évolution du réseau avant de présenter ses résultats à l'académie.

Visualisation en perspective du réseau à l'étape 2 de son développement :

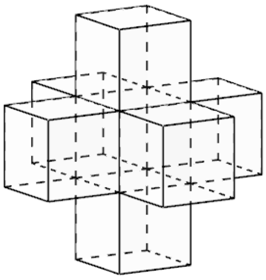
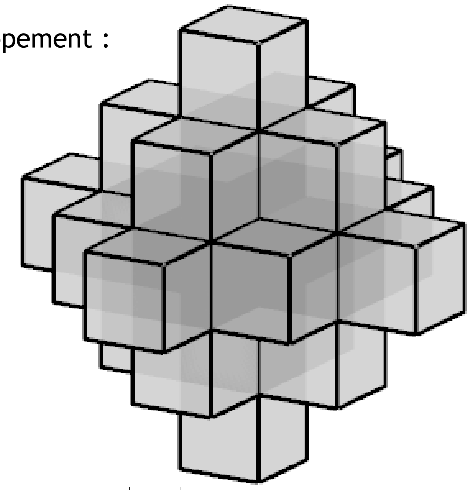


Illustration de l'étape 3 du développement :



Eugen utilise (page 33) une représentation plane du réseau pour déterminer le nombre de cubes qu'il contient :

Étape 1

1

Étape 2

	1	
1	3	1
	1	

Étape 3

		1		
	1	3	1	
1	3	5	3	1
	1	3	1	
		1		

Étape 4

			.			

Étape 1 : 1 seul cube
Étape 2 : 7 cubes

Calcul du nombre de cubes dans le réseau :

1. Combien de cubes font partie du réseau à l'étape 3 ? à l'étape 4 ?

Pour prévoir l'évolution du nombre de cubes, on peut les compter en regroupant les valeurs identiques (ce n'est pas la seule méthode possible). Soit (U_n) la suite correspondante.

- $U_1=1$
- $U_2=3+4\times1=7$
- $U_3=5+8\times1+4\times3=\ldots$

2. Calculer de cette façon U_4 puis U_5 .

3. On considère l'algorithme suivant.
   Que calcule-t-il ?
   Expliquer comment le calcul s'effectue.

```
Somme ← 5
a ← 8
b ← 1
Pour i allant de 1 à 2
  | Somme ← Somme+a*b
  | a ← a-4
  | b ← b+2
FinPour
Afficher "somme : ", Somme
```

4. Comment modifier cet algorithme pour qu'il calcule le nombre de cubes dans le réseau pour une étape *n* quelconque ?

5. Calculer les valeurs U_n pour $n \leq 20$.

Recherche de l'expression de U_n :

Eugen Robick a déterminé, par calcul, une formule donnant directement la valeur de U_n à l'aide d'un polynôme.

5. Visualiser dans GeoGebra l'évolution du nombre de cubes.
   Comparer la croissance de la suite à celle des fonctions $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$ et $f_4(x) = x^4$.

6. Créer une liste des points (n, U_n) correspondant aux 20 premières étapes de l'évolution du réseau.
   Utiliser la commande Ajustpoly[*liste*,*degré*] où *degré* est un nombre entier à déterminer, pour visualiser l'évolution par une courbe.

7. En déduire l'expression d'un polynôme à coefficients rationnels qui semble exprimer l'évolution du nombre de cubes.

8. Utiliser l'expression obtenue pour calculer U_{21} , U_{30} , U_{50} .
   Ces valeurs correspondent-elles à celles obtenues par votre algorithme de calcul ?

Reste à justifier que cette expression est bien exacte pour toute valeur de *n* supérieure ou égale à 1.

Justification :

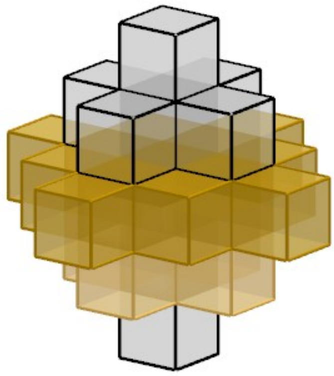
Eugen Robick connaît trois formules que nous utiliserons au besoin, sans les démontrer ici :

- Somme des *n* premiers entiers impairs : $1 + 3 + ... + (2n-1) = n^2$
- Somme des *n* premiers entiers : $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- Somme des *n* premiers carrés : $1 + 4 + 9 + ... + n^2 = \dfrac{2n^3+3n^2+n}{6}$

9. Rangée majeure :
   Prouver que la rangée centrale du réseau contient à l'étape n un nombre de cubes R_n égal à $2n^2 - 2n + 1$.

10. Observer le schéma ci-contre qui illustre le passage de l'étape 2 à l'étape 3 en ajoutant deux rangées.
    En déduire qu'à l'étape n, le cube contient $4n^2 - 8n + 6$ cubes supplémentaires.

11. Retrouver par calcul l'expression de U_n conjecturée à la question 7.



---

*La fièvre d'Urbicande, Collection *Les cités obscures*, Schuiten/Peeters. Editions Casterman 1985