

Annexe I

P3 : Programme de mathématiques

L'enseignement des mathématiques dans les sections de technicien supérieur systèmes numériques se réfère aux dispositions de l'arrêté du 4 juin 2013 fixant les objectifs, contenus de l'enseignement et référentiel des capacités du domaine des mathématiques pour le brevet de technicien supérieur.

Les dispositions de cet arrêté sont précisées pour ce BTS de la façon suivante :

Lignes directrices

Objectifs spécifiques à la section

Le programme de mathématiques est conçu pour apporter les éléments nécessaires à la compréhension des notions utilisées en traitement numérique du signal et pour donner les bases nécessaires à une poursuite d'études post-BTS.

Organisation des contenus

C'est en fonction de ces objectifs que l'enseignement des mathématiques, dont le module transformée de Fourier discrète propre à cette section de BTS, est conçu ; il peut s'organiser autour de six pôles :

- une étude des fonctions et techniques usuelles de l'analyse pour l'étude des phénomènes continus ;
- un rappel sur les suites et une première approche de la transformée en z pour l'étude des phénomènes discrets ou discrétisés ;
- une étude des nombres complexes ;
- une introduction à la transformée de Fourier discrète, outil indispensable au traitement et à la représentation du signal, ainsi qu'à la perception de la dualité temps / fréquence ;
- une initiation au calcul matriciel ;
- un approfondissement en calcul des probabilités.

Une valorisation des aspects numériques et graphiques pour l'ensemble du programme, une initiation à quelques méthodes élémentaires de l'analyse numérique et l'utilisation à cet effet des moyens informatiques appropriés est vivement encouragée : calculatrice programmable à écran graphique, ordinateur muni d'un tableur, de logiciels de calcul vectoriel, formel, de géométrie ou d'application (modélisation, simulation, etc.).

Organisation des études

L'horaire est de 2 heures classe entière + 1 heure de travaux dirigés en première année et de 2 heures classe entière + 1 heure de travaux dirigés en seconde année.

Programme

Le programme de mathématiques est constitué des modules suivants :

- **suites numériques** ;
- **fonctions d'une variable réelle**, à l'exception de « cas d'une asymptote oblique » dans « limites de fonctions », « approximation locale d'une fonction » et « courbes paramétrées » ;
- **fonctions d'une variable réelle et modélisation du signal** ;
- **calcul intégral** ;
- **équations différentielles**, à l'exception de « nombres complexes » et « équations linéaires du second ordre à coefficients réels constants » ;
- **transformée de Fourier discrète**. Les « propriétés avancées de la transformée de Fourier discrète, opération de filtrage numérique » constituent un approfondissement du programme qui peut être utile aux étudiants souhaitant un complément spécifique au traitement du signal. À ce titre, ce paragraphe ne fait pas l'objet d'une évaluation et pourra être enseigné durant les heures d'accompagnement personnalisé (AP) ;
- **transformation en z** ;
- **probabilités 1** ;
- **probabilités 2** ;
- **nombres complexes** ;
- **calcul matriciel**.

Transformée de Fourier discrète

Ce module s'inscrit en complément des enseignements de théorie du signal délivrés dans les autres matières. Les étudiants y ont observé qu'un signal déterministe possède une empreinte spectrale, constituée de raies dans le cas d'un signal périodique, continue dans le cas d'un signal de durée finie, plus complexe dans le cas général.

C'est dans ce cadre général que se pose la question du calcul effectif du spectre d'un signal sur une machine (ordinateur, analyseur de spectre), et qu'intervient la transformée de Fourier discrète (TFD). Après l'avoir définie, le professeur la mettra en œuvre sur ordinateur dans quelques cas concrets, et commentera, en interdisciplinarité, les

imperfections constatées (repliement de spectre, ondulations). Les propriétés élémentaires de la transformée de Fourier discrète (TFD) seront ensuite exposées, et vérifiées sur machine.

Un dernier paragraphe portera sur le filtrage numérique et sa réalisation par TFD et TFD inverse. Cet apport est un approfondissement qui peut être utile aux étudiants souhaitant des compléments spécifiques au traitement du signal. À ce titre, il ne fait pas l'objet d'une évaluation et pourra être enseigné durant les heures d'accompagnement personnalisé (AP).

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
<p>Définition mathématique de la transformée de Fourier discrète (TFD)</p> <p>On note $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, $n \geq 2$ entier naturel donné.</p> <p>La TFD d'une séquence $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ de n complexes est une séquence $(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$ de n nouveaux complexes.</p> <p>Observation de la TFD d'une acquisition (éventuellement complétée de zéros) à la cadence T_{ech} d'un signal.</p>	<p>Placer $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$, ainsi que $1, \omega^{-1}, \dots, \omega^{-(n-1)}$ sur le cercle unité.</p> <p>$\omega^n = 1$</p> <p>Simplifier ω^k, $k \in \mathbf{Z}$ sur des exemples.</p> <p>$X_\ell = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \omega^{-k \cdot \ell}$</p> <p>Calcul sur logiciel de la TFD à l'aide d'une matrice de TFD.</p> <p>Calculer la TFD à l'aide de commandes logicielles prêtes à l'emploi.</p> <p>Traiter une sinusoïde, jouer sur T_{ech}, le nombre de zéros ajoutés aux bords (« Zero Padding »), le nombre total d'échantillons. Lecture critique du résultat.</p>	<p>Ces notions seront illustrées avec des valeurs précises de n (2, 3, 4, 5 ...).</p> <p>Le symbole ω utilisé ici est parfois noté w, pour éviter toute confusion avec une pulsation en sciences physiques.</p> <p>L'algorithme de transformée de Fourier discrète rapide (FFT) est hors programme. Son existence peut cependant être évoquée.</p> <p>Expérimentations à faire sur un logiciel de calcul vectoriel (type Scilab) et, en interdisciplinarité, sur l'analyseur de spectre. Il est admis en mathématiques que la première moitié de cette TFD approxime le spectre du signal originel aux fréquences $0, \frac{1}{n \cdot T_{ech}}, \frac{2}{n \cdot T_{ech}}, \dots, \frac{1}{2 \cdot T_{ech}}$.</p>
<p>Propriétés mathématiques élémentaires de la transformée de Fourier discrète (TFD)</p> <p>Linéarité de la TFD</p> <p>Réversibilité de la TFD</p> <p>Effet d'une conjugaison</p> <p>Formule de Bessel</p> <p>Effet d'un décalage fréquentiel</p>	<p>TFD d'une somme, éventuellement pondérée.</p> <p>$x_k = \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} X_\ell \cdot \omega^{+k \cdot \ell}$</p> <p>$\overline{TFD(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})} = n \cdot TFD^{-1}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$</p> <p>$\sum_{k=0}^{n-1} x_k ^2 = \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} X_\ell ^2$</p> <p>$TFD(x_0, x_1 \cdot \omega, \dots, x_{n-1} \omega^{n-1}) = (X_{n-1}, X_0, \dots, X_{n-2})$</p>	<p>Admis, et à vérifier sur logiciel à partir d'un exemple.</p> <p>Formule non exigible de mémoire.</p> <p>Admis, et à vérifier sur logiciel à partir d'un exemple. En interdisciplinarité : interprétation énergétique.</p> <p>Formule non exigible de mémoire. À vérifier sur logiciel à partir d'un exemple. En interdisciplinarité : opération connue sous le nom de transposition fréquentielle.</p>

<p>Propriétés avancées de la transformée de Fourier discrète (TFD), opération de filtrage numérique</p>		
<p>Convolution apériodique de deux suites $(\dots, u_{-1}, u_0, u_1, \dots)$ et $(\dots, h_{-1}, h_0, h_1, \dots)$</p>	$(u * h)_k = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} u_{k-\ell} \cdot h_\ell$ <p>Expliciter $(u * h)_k$ quand les suites u et h sont causales, et que h est de longueur finie et courte.</p>	<p>La formule pourra ne pas être présentée telle que aux étudiants, mais en renversant h puis en la décalant.</p>
<p>Convolution circulaire d'une séquence $(u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ par une autre de même longueur $(h_0, h_1, \dots, h_{n-1})$</p>	$(u \otimes h)_k = \sum_{\ell=0}^{n-1} u_{k-\ell [n]} \cdot h_\ell$ <p>Expliciter $(u \otimes h)_k$ pour des valeurs précises de n.</p>	<p>La formule pourra ne pas être présentée telle que aux étudiants, mais en renversant h puis en la faisant tourner autour de u.</p>
<p>TFD d'une convolution circulaire</p>	$TFD(u \otimes h) = TFD(u) \cdot TFD(h)$	<p>Admis.</p>
	$u \otimes h = TFD^{-1}(TFD(u) \cdot TFD(h))$	
<p>Filtrage d'une suite (u_0, u_1, \dots) causale infinie par une séquence $(h_0, h_1, \dots, h_{\ell-1})$</p>	<p>Introduction à la méthode d'Overlap and Save.</p>	<p>Des expériences sur des fichiers sons pourront être faites sur logiciel.</p>