Stage sur site lycée Fresnel
Autour du calcul formel

Avril 2013

I. Développement et factorisation

Remplir le tableau suivant à l'aide des instructions de XCAS : `factoriser`, `developper`, `forme_canonique`, `simplifier`.
Pour les tableaux de variations, tracer la courbe à l'aide de `graphe`, et compléter à la main.

	Forme développée	Forme factorisée	Forme canonique	Tableau de variations
f_1	$2x^2+3x-1$			
f_2		$(2x+3)\left(x-\frac{5}{3}\right)$		
f_3			$\frac{1}{4}-3(x+1)^2$	
f_4		$-2(x-3)^2$		
f_5	$-x^2-x-1$			

II. Équations et inéquations

Reprendre les fonctions de l'exercice précédent, et résoudre les équations et inéquations de type $f(x)=0$, $f(x)\geq 0$, $f(x)\leq 0$.

III. Substitution et taux d'accroissement

Soit $f(x)=x^2-3x+2$.
Pour que f soit interprétée comme une fonction, on peut la déclarer comme suit :

```
f(x):=x^2-3*x+2
```

Quelques calculs à faire :

- $f(0)$, $f(2)$.
- $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$, à stocker dans la fonction $g(x)$.
- Faire calculer $g(0,1)$, $g(0,01)$, $g(10^{-6})$. Pour évaluer le résultat : `evalf`.
- Simplifier $g(x)$. Quelle est la dernière étape pour conclure ?
- Même travail avec le taux d'accroissement de f en 2, en 1… enfin en a.

IV. Manipulation de fonctions rationnelles

Soit $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{x}{x-3}$, que l'on peut déclarer comme variable par l'instruction :

```
f:=2/x-x/(x-3)
```

Tester les instructions ci-dessous sur cette fonction, et dégager des utilisations possibles.

Instruction / méthode	Résultat	Utilisation possible
`partfrac`		
`ratnormal`		
	Factoriser le dénominateur	
`deriver`		
`factor_xn`		
`limite(f,x,+infinity)`		

Comment organiser ces instructions de manière à mener une étude de fonction complète ?

V. Opérations sur les limites

Soit $f(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. Faire calculer sa limite, celles de $e^{\frac{x^2}{2}}$ et de x^2, en $+\infty$.
2. Réaliser le quotient des deux limites des numérateur et dénominateur de f : que dit la machine ?
3. Posons $u = \frac{x^2}{2}$. Résoudre cette équation de manière à obtenir x en fonction de u.
4. Avec la commande `substituer`, remplacer dans $f(x)$ la variable x par son expression en fonction de u (u est « naturellement » supposé positif).
   Cela aide-t-il à l'étude de la limite de f ?

VI. Une suite arithmético-géométrique

Ouvrir un nouveau programme.
On définit une suite par récurrence par le programme ci-contre.
Ne pas oublier de compiler le programme pour qu'il soit utilisable ensuite (bouton « OK »).

```
u(n):={
si n==0 alors 4
sinon 2/3*u(n-1)-3;
fsi;
}:;
```

1. Tester quelques valeurs de la suite (u_n).
   Pour en afficher toute une liste : utiliser l'instruction `seq`.
   Conjecturer la limite de (u_n).
2. Représenter la suite (u_n) : `graphe_suite(2/3*x-3,4,n)`, où n est le nombre de termes à représenter.
3. Trouver le point fixe ℓ pour (u_n), puis définir la suite auxiliaire (v_n) :
   `v(n):=u(n)`$-\ell$
4. Conjecturer la nature de (v_n).
   On peut comparer un certain nombre de termes de (v_n) avec ceux d'une suite (w_n) de terme général $w_n = v_0 q^n$:
   `seq(v(n)-v(0)*q^n,n,0,20)`
5. Comparer les graphiques des suites (u_n) et $(w_n + \ell)$ à l'aide de l'algorithme de traçage ci-contre.

```
trace_suite(n):={
local k,S;
S:=NULL;
pour k de 0 jusque n pas 1 faire
S:=S,affichage(point(k,u(k)),point_carre);
fpour;
}:;
```

Compiler, puis :

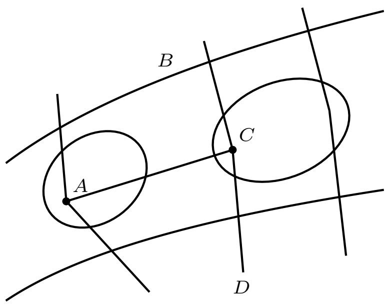
`trace_suite(10),graphe(w(x)+`ℓ`,x=0..10)`

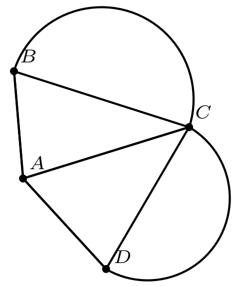
VII. Matrices et études de graphes

Exemple inspiré du document d'accompagnement du nouveau programme de spécialité S.

Les 7 ponts de Königsberg

La ville de Königsberg possédait 7 ponts reliant les deux rives du fleuve et les deux îles (voir schéma de gauche).
Question classique : existe-t-il un chemin passant par les 7 ponts une fois et une seule, et permettant de revenir à son pont de départ ?
La présente activité n'a pas pour but de répondre à cette question, mais d'explorer les matrices d'adjacence de graphes.





Un tel problème est équivalent à un graphe reliant quatre points :
- A et C sont les deux îles ;
- B et D sont les deux rives ;
- les 7 ponts sont les arêtes du graphe reliant les points.

La matrice M de ce graphe est le tableau des nombres de chemins directs existants entre ses sommets :

Origine \ Arrivée	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	2	0
C	...	...	...	...
D	...	...	...	...

Ainsi le coefficient $a_{i,j}$ (ligne i, colonne j) est le nombre d'arêtes reliant le point i au point j.
Pratique : construire la matrice M de ce graphe sous XCAS, à l'aide d'un tableau.

Chemins de longueur 2 : un peu de théorie

Supposons que pour i, k, et j entiers, $a_{ik} = s$ et $a_{kj} = t$:
- il y a s arêtes reliant le point numéro i au point numéro k ;
- il y a t arêtes reliant le point numéro k au point numéro j.

Alors il existe exactement $s \times t = a_{ik} \times a_{kj}$ chemins de longueur 2 (deux arêtes) reliant le point i au point j, en passant par k : il suffit de visualiser l'arbre des chemins.
La somme des ces $a_{ik} \times a_{kj}$, pour tous les k, donne le nombre de chemins de longueur 2 reliant le point i au point j.

Conclusion
Le nombre de chemins de longueur 2 reliant les sommets du graphe est donné par la matrice M^2.
Le nombre de chemins de longueur n reliant les sommets du graphe est donné par la matrice M^n.

Pratique concernant la connexité du graphe

Répondre aux questions suivantes à l'aide de manipulations de matrices sous XCAS.
1. Le graphe des 7 ponts est-il connexe, *i.e.* deux sommets ont-ils toujours un chemin les reliant ?
2. Qu'en est-il si le pont entre les deux îles A et C est détruit ?
3. Pour un graphe quelconque, jusqu'à quelle puissance de M faut-il calculer pour savoir s'il est connexe ?
4. Les ponts sont trop étroits ; on définit un sens de circulation sur chacun :
   - de C à A ;
   - de B à A puis à D ;
   - les couples de ponts entre les rives et l'île C permettent l'aller par l'un et le retour par l'autre.

   Étudier la connexité de ce graphe non symétrique.

VIII. Ensemble de Mandelbrot

Exemple issu des formations aux nouveaux programmes de première, automne 2011.

L'ensemble de Mandelbrot $\mathcal{M}$ est l'ensemble des points du plan complexe, d'affixe c, tels que la suite (z_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ ci-contre ne tende pas vers l'infini.

$$\begin{cases} z_0 = & 0 \\ z_{n+1} = & z_n^2 + c \end{cases}$$

On utilisera la propriété suivante (admise) :
S'il existe un entier n avec $\mid z_n \mid > 2$, alors (z_n) diverge vers l'infini.

1. Coder le programme ci-contre. Quel est le rôle de « $n < 100$ » ?
2. On peut conjecturer l'appartenance de quelques points à $\mathcal{M}$, son intersection avec les axes…
3. Rédiger un autre programme, utilisant la fonction `mandel`, qui trace l'ensemble de Mandelbrot grâce à un double balayage.
   Outils :
   - `DispG` pour créer la fenetre graphique ;
   - `ClrGraph()` pour nettoyer le graphique ;
   - `affichage(couleur(point(x+i*y),si mandel(x+i*y)<100 alors noir sinon vert fsi));`

```
mandel(c):={
local n,z;
n:=0; z:=0;
tantque abs(z)<=2 et n<100 faire
z:=z^2+c;
n:=n+1;
ftantque
retourne n
}:;
```