Corrigé des Olympiades de mathématiques de quatrième – concours René Merckhoffer
Mardi 26 mars 2019

Exercice 1. La persistance d'un nombre

1. *a.* $77 \rightarrow 49 \rightarrow 36 \rightarrow 18 \rightarrow 8$; la persistance de 77 est 4.
b. $28\,534 \rightarrow 960 \rightarrow 0$; la persistance de 28 534 est 2.
c. $6\,785\,791 \rightarrow 105\,840 \rightarrow 0$; la persistance de 6 785 791 est 2.

2. Si l'un des chiffres est 0, le produit est nul. La suite des produits s'arrête dès qu'il y a un 0 parmi les chiffres.

3. Le produit par 1 n'a pas d'effet. La persistance d'un nombre dont l'écriture est déduite de cette d'un autre en insérant un 1 est la même que celle du nombre dont il est issu.

4. Le nombre 77 111 111 111 111 111 111 s'écrit avec 20 chiffres. Sa persistance est 4, comme celle de 77.

5. Le produit de 5 par un nombre (en l'occurrence un chiffre) pair a 0 pour chiffre des unités. La persistance d'un nombre dont l'écriture comporte un 5 et un chiffre pair est donc au plus 2 (elle est égale à 1 dans le cas où l'écriture comporte aussi un 0).

Exercice 2. La mosaïque de Penthée

1. L'ovale est constitué de l'arc de cercle de centre M d'extrémités V et W, de l'arc de cercle de centre N d'extrémités U et V, de l'arc de centre O d'extrémités Z et U et de l'arc de centre P d'extrémités W et Z.

2. Figure à faire.

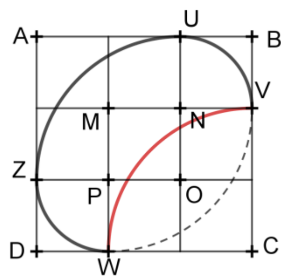
3. Le périmètre se compose de deux quarts de cercle de rayon 2 et deux quarts de cercles de rayon 1. Au total :

$$p = 2\pi + \pi = 3\pi.$$

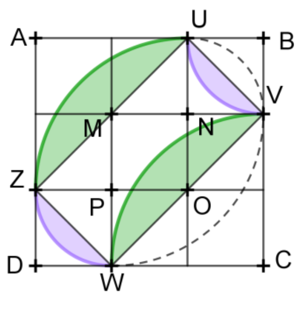
4. La surface de l'ovale peut être décomposée en deux quarts de cercles de rayon 1 et deux quarts de cercles de rayon 2 partiellement superposés (la partie commune est un carré de côté 1). Il s'ensuit que l'aire $\mathcal{A}$ s'exprime ainsi :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\pi \times 1^2 + \frac{1}{2}\pi \times 2^2 - 1^2 = \frac{5}{2}\pi - 1$$

5. On peut, par exemple, remplacer l'arc de cercle de centre M par un arc de cercle de même rayon de centre C. On obtient la figure de droite. Le périmètre est inchangé et l'aire diminue de l'aire de la surface comprise entre les deux arcs, l'ancien et le nouveau.



6. On peut aussi remplacer l'arc de cercle de centre B par l'arc de centre N limité par U et V. On obtient encore une figure de même périmètre. Les aires des surfaces vertes et les aires des surfaces violettes se compensent. La figure créée a donc la même aire que le rectangle UVWZ. Cette aire a pour mesure 4.



Exercice 3. Code EAN

1. Pour juger de la validité du code 4971850187820, on effectue le calcul :

$$S = 4 + 7 + 8 + 0 + 8 + 8 + 3 \times (9 + 1 + 5 + 1 + 7 + 2) = 35 + 3 \times 25 = 110$$

C'est bien 0 qu'il faut ajouter à 110 pour obtenir un multiple de 10.

2. On fait la même suite d'opérations avec $978204732850C$, ce qui donne :
$S = 9 + 8 + 0 + 7 + 2 + 5 + 3 \times (7 + 2 + 4 + 3 + 8 + 0) = 31 + 3 \times 24 = 103.$
Cette fois, c'est 7 qu'il faut ajouter. $C = 7$.

3. Le calcul fait à partir de $32525x7041767$ donne
$S = 3 + 5 + 5 + 7 + 4 + 7 + 3 \times (2 + 2 + x + 0 + 1 + 6) = 31 + 3 \times (11 + x) = 64 + 3x.$
Si on additionne 7 à ce total, on doit trouver un multiple de 10, donc $71 + 3x$ est un multiple de 10.
Finalement $x = 3$.

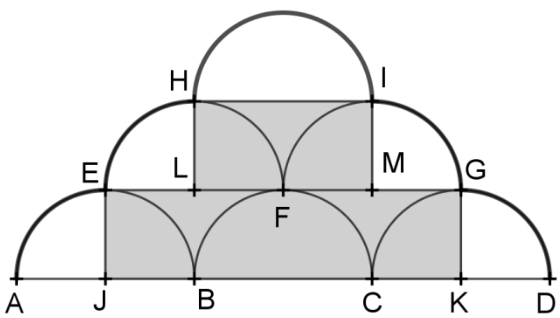
4. $S = 3 + 4 + 2 + 8 + 8 + 9 + 8 + 3 \times (7 + 2 + 7 + 0 + 5 + 5) = 42 + 3 \times 26 = 120$
Si on remplace le premier chiffre, 3, par x, et le deuxième, 7, par y, la somme S s'écrit :
$S = 120 - 3 - 3 \times 7 + x + 3y = 96 + x + 3y.$
La somme $x + 3y$ peut donc prendre les valeurs $4, 14, 24$ ou 34.
Pour chaque valeur de y, cherchons la (ou les) valeur(s) de x (si elle existe).

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	4	1	8	5	2	9	6	3	0	7

Ainsi, on peut remplacer les 2 premiers chiffres (37) par 40 ; 11 ; 82 ; 53 ; 24 ; 95 ; 66 ; 37 (ouf, on l'a retrouvé) ; 79.

Exercice 4. Six demi-cercles

Une 1e solution :

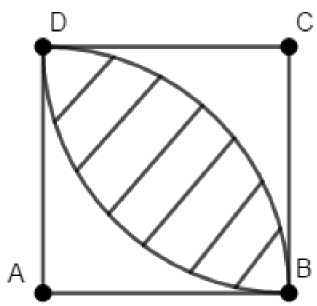


Le domaine peut être décomposé en 6 quarts de disques de rayon 1 et six carrés de côté 1 (grisés).

L'aire totale peut s'exprimer ainsi :

$$\mathcal{A} = \frac{6}{4}\pi + 6 = \frac{3}{2}\pi + 6$$

Une 2e solution :



Calculons tout d'abord l'aire de la surface hachurée ci-contre, inscrite dans le carré ABCD de côté 1.

Les deux « coins » en bas à gauche et en haut à droite mesurent chacun $1 - \frac{\pi}{4}$.
Ainsi, l'aire hachurée mesure $1 - 2 \times \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$

La figure est composée de trois demi-disques (dont l'aire mesure $3 \times \frac{\pi}{2}$) et de trois disques complets (dont l'aire mesure $3 \times \pi$) auxquels ont été soustraits six fois l'aire hachurée (dont l'aire mesure $6 \times (\frac{\pi}{2} - 1)$).
Ainsi l'aire totale est $3 \times \frac{\pi}{2} + 3\pi - 6 \times \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 6 + \frac{3\pi}{2}$.