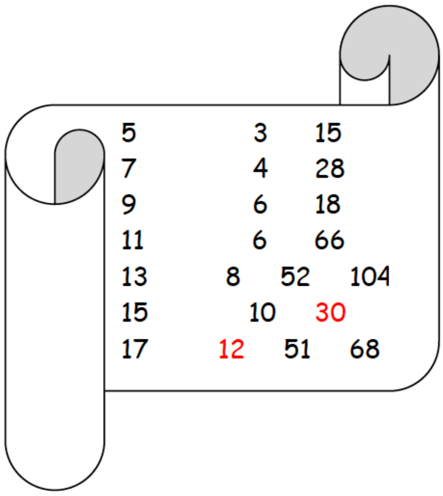
Olympiades académiques de mathématiques 2013
Classes de quatrième – éléments de solution



Exercice 1 : des tables égyptiennes

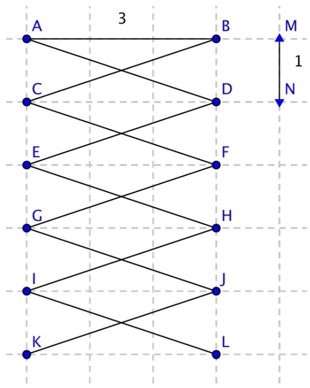
1. La troisième ligne du tableau signifie que $\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{2}{9}$

   (le calcul donne effectivement : $\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$)

2. $\frac{2}{15}-\frac{1}{10}=\frac{4-3}{30}=\frac{1}{30}$. Le nombre manquant sur la ligne du 15 est 30.
   $\frac{2}{17}-\frac{1}{51}-\frac{1}{68}=\frac{2}{17}-\frac{1}{3\times17}-\frac{1}{4\times17}=\frac{24-4-3}{12\times17}=\frac{17}{12\times17}=\frac{1}{12}$.
   Le nombre manquant sur la ligne du 17 est 12.

3. Soit n un nombre entier naturel non nul. Si n est pair, il existe un entier naturel non nul a tel que $n = 2a$.
   Alors $\frac{2}{n}=\frac{2}{2a}=\frac{1}{a}$.
   L'écriture de $\frac{2}{n}$ sous forme de fraction égyptienne s'obtient immédiatement, le recours à une table n'est pas nécessaire.

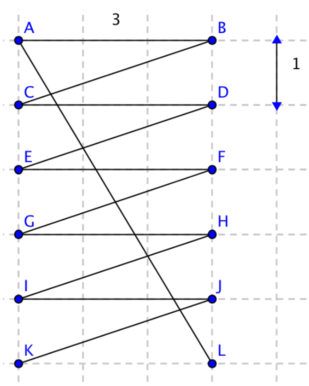
Exercice 2 : les lacets



<u>Le zigzag américain</u>.
Les segments [AD], [BC], [CF], [DE], [EH], [FG], [GJ], [HI], [IL], [JK] ont la même longueur.
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A, on obtient
$BC^2=AB^2+AC^2$ soit $BC^2=3^2+1^2=10$, d'où $BC=\sqrt{10}$.
La longueur de lacet nécessaire au zigzag américain est égale à AB + 10 BC, soit $3+10\sqrt{10}$.
En arrondissant au millimètre, il faut 34,6 cm pour réaliser le laçage zigzag.

<u>Le nœud papillon</u>.
Pour ce laçage, en reprenant les mêmes notations que pour le zigzag :
- les segments [AD] et [BC] sont remplacés respectivement par [AC] et [BD],
- les segments [EH] et [FG] sont remplacés respectivement par [EG] et [FH],
- les segments [IL] et [JK] sont remplacés respectivement par [IK] et [JL],
- les segments [CF], [DE], [GJ], [HI] restent inchangés

La longueur de lacet nécessaire est donc inférieure à celle utilisée pour le zigzag.



<u>Gavage</u>.
La longueur de lacet nécessaire est dans ce cas égale à 5AB + 5BC + AL.
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABL rectangle en B, on obtient
$AL^2=AB^2+BL^2$ soit $AL^2=3^2+5^2=34$, d'où $AL=\sqrt{34}$.
$5AB+5BC+AL=15+5\sqrt{10}+\sqrt{34}$.
En arrondissant au millimètre, il faut 36,6 cm pour réaliser le laçage gavage.

Conclusion : <u>le gavage est le laçage le plus long</u> .

Exercice 3 : Vrai – Faux

Ludovic doit répondre à un test de 25 questions. Les réponses sont « Vrai » ou « Faux ». Son professeur de mathématiques donne l'indication suivante : dans toute série de 5 réponses consécutives il y a exactement trois réponses « Vrai ».

Question 1	V
Question 2	F
Question 3	V
Question 4	V
Question 5	F
Question 6	F
.....	....

1. Les réponses aux 5 questions consécutives numérotées de 2 à 6 sont F, V, V, F, F.
   Il n'y a que deux réponses « Vrai » dans cette série de cinq questions consécutives, elle ne peut donc pas convenir.

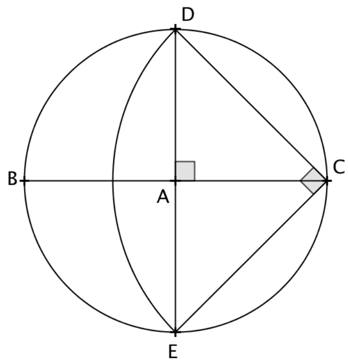
2. Découpons la série des 25 questions en 5 séries de 5 questions consécutives (de 1 à 5, de 6 à 10, etc).
   Chacune de ces séries contient 3 réponses « Vrai ».
   Le questionnaire contient donc 15 réponses « Vrai »

3. La réponse à la première question est « Faux ». Pour que la série des 5 questions numérotées de 1 à 5 contienne 3 réponses « Vrai », il faut que la série des quatre questions numérotées de 2 à 5 contienne 3 réponses « Vrai ». Et donc pour que la série des 5 questions numérotées de 2 à 6 contienne 3 réponses « Vrai », il faut que la réponse à la question 6 soit « Faux ».

4. En appliquant le même raisonnement que dans la question précédente à partir de la question 6, on déduit que les réponses aux questions 11, 16 et 21 sont « Faux ».
   Sachant que la réponse à la question 25 est « Faux », en « remontant » la liste des questions et par un raisonnement analogue au précédent, on déduit que les réponses aux questions 20, 15, 10 et 5 sont « Faux ».
   On a donc ainsi obtenu 10 réponses « Faux », or le questionnaire comprend 15 réponses « Vrai », on connaît donc les réponses à toutes les questions.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
F	V	V	V	F	F	V	V	V	F	F	V	V	V	F	F	V	V	V	F	F	V	V	V	F

Exercice 4 : dans les yeux



<u>L'œil du chat</u>
La droite (BC) étant perpendiculaire à la droite (DE) en A, l'aire du triangle DEC est égale à $\frac{DE \times AC}{2} = DA \times AC$.
Le rayon du disque étant égal à 5mm, l'aire du triangle DCE est égale à 25 mm^2

Le triangle DCE est inscrit dans le cercle de diamètre [DE], il est donc rectangle en C.
Le secteur angulaire DEC a donc pour une aire égale au quart de celle d'un disque de rayon DC.
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle DAC rectangle en A, on obtient $DC^2 = DA^2 + AC^2 = 5^2 + 5^2 = 50$.

L'aire du quart de disque de rayon DC est alors égale à $\frac{50\pi}{4} = 12{,}5\pi$.

Par soustraction, on obtient l'aire d'une demi pupille de chat , puis, en multipliant par deux, l'aire de la pupille complète.
L'aire de la pupille du chat, exprimée en mm^2, est donc égale à $2(12{,}5\pi - 25) = 25\pi - 50$.

<u>L'œil du lapin</u>
La pupille du lapin est un disque de 3 mm, son aire est donc égale à 9 mm^2.

<u>Conclusion</u>
On peut répondre à la question en comparant les valeurs approchées données par la calculatrice : la pupille du chat est plus grande que celle du lapin.
L'arrondi au dixième de l'aire de la pupille du chat, exprimée en mm^2, est 28,5
L'arrondi au dixième de l'aire de la pupille du lapin, exprimée en mm^2, est 28,3