Stage sur site lycée Fresnel
Exploration algorithmique d'une fonction

Avril 2013

I. Un énoncé : bac S, Nouvelle-Calédonie novembre 2012

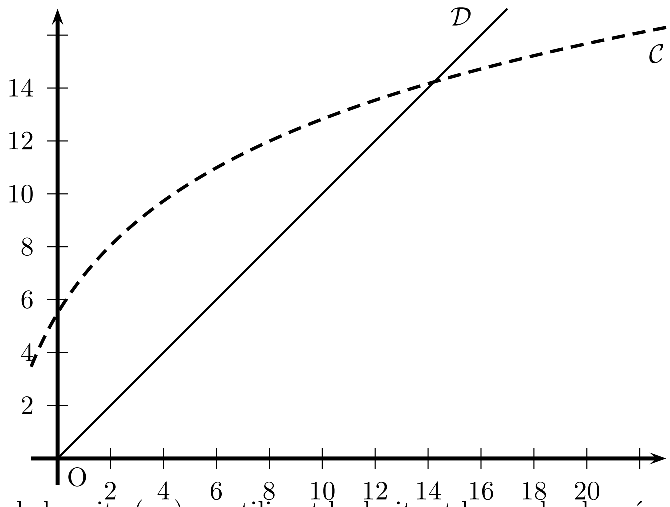
Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = 5\ln(x+3) - x$.

1. a) On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   b) Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   c) Montrer que, pour tout x strictement positif on a : $f(x) = x\left(5\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)$.
   d) En déduire la limite de f en $+\infty$.
   e) Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. On notera α cette solution.
   b) Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14\ ;\ 15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
   c) En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel $n \neq 0$: $u_{n+1} = 5\ln(u_n + 3)$.
On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 5\ln(x+3)$.
Ci-contre on a tracé dans un repère orthonormé la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathcal{C}$, courbe représentative de la fonction g.



1. a) Construire sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.
   b) Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n)
2. a) Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   b) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la partie A question 2. a.
   c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.
   d) Démontrer alors la conjecture émise à la question 1. b. de la partie B.
   e) En utilisant la question 2. a. de la partie A, justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.
3. On considère l'algorithme ci-contre.
   a) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Justifier que cet algorithme se termine.
   b) Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).

```
u prend la valeur 4
Répéter Tant que u − 14,2 < 0
    u prend la valeur de 5 ln(u + 3)
Fin du Tant que
Afficher u
```

II. Questions algorithmiques

1. Dichotomie

Modifier la partie A de manière à introduire la recherche d'un encadrement de α par dichotomie.
Options possibles :

- faire créer l'algorithme (difficile) ;
- donner un algorithme et le faire étudier ;
- faire comparer deux algorithmes : l'un avec boucle *Tant que*, l'autre avec boucle *Pour*.

2. Rapidité de divergence

Créer un algorithme qui, pour un réel négatif A donné, renvoie un réel x_0 tel que pour tout $x \geq x_0$, on ait $f(x) \leq A$.

3. Représentation graphique de suite

Modifier la question 1.a) de la partie B de sorte qu'un algorithme se charge de la représentation graphique. L'algorithme doit demander le nombre de termes de la suite à représenter.

4. Convergence de suite

Modifier l'algorithme de la partie B, question 3, de sorte qu'il affiche un encadrement de α à une précision donnée.

5. Calcul approché d'intégrale

Créer un algorithme qui calcule une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^{10} 5\ln(x+3)\,dx$, grâce à n rectangles.

Variantes

- Faire trouver un encadrement de l'intégrale.
- Travailler avec 2^n rectangles.
- Faire tracer les rectangles.