Olympiades académiques de mathématiques

Classes de premières (séries autres que S)

Académie de Rouen

Mercredi 18 mars

Les objets calculatrices sont autorisés, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

L'épreuve comporte quatre exercices, tous à traiter dans le temps imparti. Il est conseillé de ne pas en privilégier trop fortement un sur les autres.

Durée de la composition : 4 heures

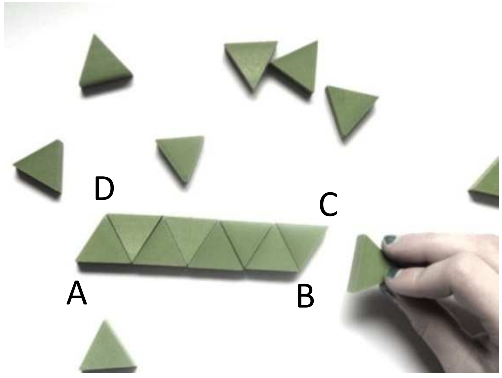
Sauf cas de force majeure, aucun candidat n'est autorisé à quitter définitivement la salle de composition moins de 2 heures après le début. Un candidat qui quitterait la salle au bout de trois heures ou moins doit rendre sa copie et son exemplaire du sujet.

Exercice numéro 1

(proposé par le jury national)

Défi entre sœurs

Patiemment, Clémence aligne les triangles équilatéraux identiques de son jeu de mosaïque en les juxtaposant comme le montre la photo ci-contre.



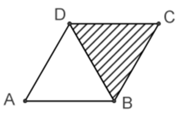
Sa sœur, Léa, qui est en première et toujours en quête de quelques calculs à effectuer, s'amuse à trouver la **valeur exacte** des longueurs des diagonales des quadrilatères obtenus.
Chaque triangle équilatéral a pour côté 1. On note :

- ABCD un quadrilatère construit par Clémence ;
- L = AC la longueur de la diagonale [AC] ;
- l = BD la longueur de la diagonale [BD].

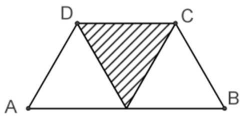
Partie A

1. Calculer la longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1.

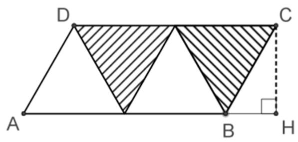
2. Calculer les longueurs l et L pour les cas suivants :



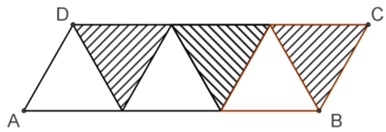
Deux triangles



Trois triangles



Quatre triangles



Six triangles

Partie B

Clémence continue à ajouter des triangles et défie sa sœur de poursuivre ses calculs de diagonales. Léa note n le nombre de triangles équilatéraux alignés (n est un entier supérieur ou égal à 2) et se met à chercher :

1. Lorsque le nombre n de triangles est **pair,** montrer que la longueur de la diagonale la plus grande est égale à $L = \sqrt{p^2 + p + 1}$, où $p = \frac{n}{2}$.

2. Si Clémence ajoute un triangle supplémentaire au cas précédent, que deviennent les longueurs l et L ?

3. Clémence a aligné 56 triangles. Déterminer les longueurs l et L calculées par Léa.

Partie C

Observant tous les calculs de longueur de diagonales effectués, Léa conjecture deux propriétés :

1re propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre impair »

2e propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre premier »

On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel divisible seulement par 1 et lui-même ; par exemple 2, 11, 29 sont des nombres premiers et 1, 8, 33 ne le sont pas.

1. Valider ou invalider chacune de ces propriétés.

2. Peut-on affirmer que la racine carrée de tout nombre premier est la longueur possible d'une diagonale d'un quadrilatère ABCD du type ci-dessus ?

3. Pourquoi n'est-il pas possible d'obtenir une diagonale de longueur $\sqrt{2\,015}$?

4. Clémence a construit un quadrilatère dont une diagonale mesure $\sqrt{1\,015\,057}$. Combien de triangles a-t-elle utilisés ? Donner toutes les réponses possibles.

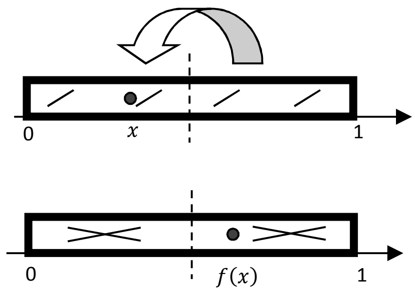
5. Clémence dit à sa sœur : « sur les grands quadrilatères, à chaque fois que l'on ajoute deux triangles, la diagonale augmente d'environ 1 ». Le constatez-vous aussi ? (détailler la démarche). Si oui, le démontrer.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Exercice numéro 2

(proposé par le jury national)

On est les rois !



Le boulanger place une fève, replie la pâte (qu'il a, ici, préalablement striée) sur elle-même, et l'étale dans le sens de la longueur : celle-ci s'étire jusqu'à retrouver ses dimensions initiales. Cette transformation, que l'on peut répéter, a donné lieu à quelques études mathématiques, dont cet exercice s'inspire.

Partie A – La transformation du boulanger

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,,1]$ par :

$$f(x) = 2x \text{ si } x \leq \frac{1}{2} \text{ et } f(x) = 2(1-x) \text{ sinon.}$$

1. Montrer que l'image par f d'un élément de [0, 1] appartient à [0, 1].
2. Justifier pourquoi cette fonction f modélise le déplacement de la fève.

Partie B – Parcours d'une fève : cycles et cible
Les images successives par f d'un élément x de $[0\,,1]$ sont notées $x_1 = f(x)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ etc. Elles correspondent aux positions successives de la fève initialement placée à l'abscisse x.

1. Quelles sont les 9 positions qui suivent l'abscisse $\frac{1}{3}$? L'abscisse 0, 33 ? Commenter.
2. Est-il possible qu'une fève, placée à l'abscisse x, revienne à sa position de départ en un seul coup ? En deux coups (mais pas en un) ? En trois coups (mais ni en un ni en deux) ? Préciser à chaque fois toutes les valeurs de x pouvant répondre à la question.
3. Quand une fève placée à l'abscisse x vient, après un nombre fini d'étapes du processus, à occuper l'abscisse nulle, on dit que « x atteint sa cible ». Donner un exemple où x atteint sa cible, et un autre où x ne l'atteint pas.
4. Le nombre $\frac{2015}{2^{2015}}$ atteindra-t-il la cible ?
5. Déterminer tous les nombres de $[0\,,1]$ atteignant leur cible.

Partie C – Étude d'un algorithme.

1. Soit un nombre x dont on suppose qu'il atteint la cible. Modifier l'algorithme proposé en **Annexe** afin qu'il affiche, dans ce cas, le nombre d'étapes nécessaires pour rejoindre le réel 0 (on recopiera le nouveau code sur sa copie).
2. D'après la question **B.5**. (ou même **B.2.**), le nombre $\frac{1}{9}$ n'atteint pas sa cible. Comment devrait se comporter l'algorithme après avoir saisi $x = \frac{1}{9}$ en entrée ? Quand on le programme sur une machine de type PC ou calculette, toujours avec $x = \frac{1}{9}$ en initialisation, puis qu'on l'exécute, il affiche cependant en sortie obtenir $x = 0$ au bout d'une cinquantaine d'itérations. Avancer une explication.

Annexe (exercice numéro 2)

Variables
x est un élément de $[0\ ,1]$
Début
Saisir le nombre x compris entre 0 et 1
Tant que $x \neq 0$ **faire**
Si $x \leq \frac{1}{2}$ **alors**
x **prend la valeur** $2\ x$
Sinon
x **prend la valeur** $2(1-x)$
Fin tant que
Fin

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Exercice numéro 3

(proposé par le jury académique)

Une opération parabolique

À partir de la parabole représentant la fonction « carré » qui, à tout nombre réel x associe le nombre x^2, on considère l'algorithme suivant :

- **Étape 1** : Choisir deux nombres réels *a* et *b* strictement positifs.
- **Étape 2** : Marquer sur la parabole le point A d'abscisse – *a*.
- **Étape 3** : Marquer sur la parabole le point B d'abscisse *b*.
- **Étape 4** : Tracer le segment [AB].
- **Étape 5** : Afficher l'ordonnée du point d'intersection du segment [AB] avec l'axe des ordonnées.

1. On se place dans le cas où *a* = 2 et *b* = 3.
   a. Vérifier graphiquement qu'en appliquant l'algorithme, on obtient, à la cinquième étape, le nombre 6.
   (*Représenter la parabole sur la copie*)
   b. Démontrer ce résultat par le calcul.

2. Soient *a* et *b* deux réels strictement positifs.
Appliquer l'algorithme précédent à plusieurs couples (*a* ; *b*).
Quelle résultat l'algorithme semble-t-il donner lorsqu'on lui fournit un couple (*a* ; *b*) ?

3. Démontrer la conjecture émise dans la question 2.

4. Si on change l'étape 2 par « Marquer sur la parabole le point A d'abscisse *a* » et l'étape 3 par « Marquer sur la parabole le point B d'abscisse – *b* », le résultat délivré par l'algorithme s'en trouvera-t-il modifié ? Justifier.

Exercice numéro 4

(proposé par le jury académique)

Un étrange partage

Un gagnant du Loto, qui vient de remporter 1 071 225 €, décide de faire don de cette fortune.

Son goût du jeu le pousse à imaginer un partage original de ses gains.

Il souhaite répartir la somme totale en créant des tas composés de pièces de 1 €.

Le nombre de pièces se prêtant à cette répartition, le gagnant procède de la manière suivante :

- le premier tas se réduit à une pièce ;
- le second en compte 3 ;
- le troisième en contient 5 ;
- le quatrième,7 ;
- et ainsi de suite (nombres impairs).

Il choisit alors de distribuer sa fortune de la façon suivante :

- le premier tas est donné à une personne ;
- les deux tas suivants à une deuxième personne ;
- les trois tas suivants à une troisième personne ;
- et ainsi de suite … (nombres entiers positifs).

1. On s'intéresse, dans cette question, à la **somme *S* des nombres entiers impairs**.
On considère l'algorithme suivant :

Variables
A, p entiers positifs
Début
Saisir le nombre *A*
Affecter à *S* la valeur 1
Affecter à *p* la valeur 1
Tant que $S < A$, **faire**
Affecter à *S* la valeur $S + (2p + 1)$
Affecter à *p* la valeur $p + 1$
Fin Tant que
Afficher *p*
Fin

a. Exécuter cet algorithme lorsque *A* vaut 16.
Qu'affiche-t-il en sortie ? Interpréter ce résultat.

b. Lorsque *A* vaut 1 071 225, l'algorithme affiche 1 035.
Quelle information ce résultat fournit-il au gagnant ?

2. On rappelle que la somme des *n* premiers entiers positifs est donnée par la formule $\frac{n\,(n+1)}{2}$.

À l'aide de la question 1.b, déterminer le nombre *n* de personnes à qui le gagnant pourra distribuer ses gains.

3. Déterminer le montant en euros reçu par chacune des quatre premières personnes.

4. On choisit au hasard une des *n* personnes.
Quelle est la probabilité que cette personne ait reçu au moins 1000 € ?