Olympiades académiques de mathématiques

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Classes de premières (série S)

Académie de Rouen

Mercredi 18 mars

Les objets calculatrices sont autorisés, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

L'épreuve comporte quatre exercices, tous à traiter dans le temps imparti. Il est conseillé de ne pas en privilégier trop fortement un sur les autres.

Durée de la composition : 4 heures

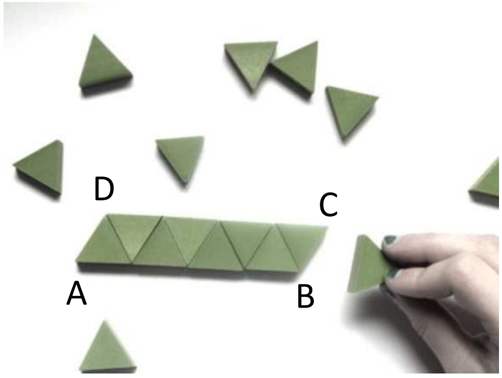
Sauf cas de force majeure, aucun candidat n'est autorisé à quitter définitivement la salle de composition moins de 2 heures après le début. Un candidat qui quitterait la salle au bout de trois heures ou moins doit rendre sa copie et son exemplaire du sujet.

Exercice numéro 1

(proposé par le jury national)

Défi entre sœurs

Patiemment, Clémence aligne les triangles équilatéraux identiques de son jeu de mosaïque en les juxtaposant comme le montre la photo ci-contre.



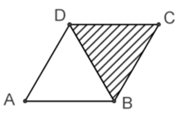
Sa sœur, Léa, qui est en première et toujours en quête de quelques calculs à effectuer, s'amuse à trouver la **valeur exacte** des longueurs des diagonales des quadrilatères obtenus.
Chaque triangle équilatéral a pour côté 1. On note :

- ABCD un quadrilatère construit par Clémence ;
- L = AC la longueur de la diagonale [AC] ;
- l = BD la longueur de la diagonale [BD].

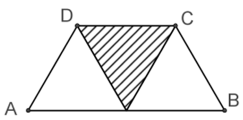
Partie A

1. Calculer la longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1.

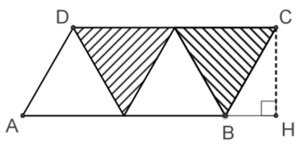
2. Calculer les longueurs l et L pour les cas suivants :



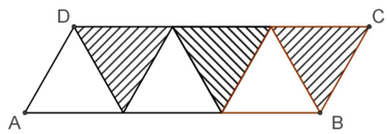
Deux triangles



Trois triangles



Quatre triangles



Six triangles

Partie B

Clémence continue à ajouter des triangles et défie sa sœur de poursuivre ses calculs de diagonales. Léa note n le nombre de triangles équilatéraux alignés (n est un entier supérieur ou égal à 2) et se met à chercher :

1. Lorsque le nombre n de triangles est **pair,** montrer que la longueur de la diagonale la plus grande est égale à $L = \sqrt{p^2 + p + 1}$, où $p = \frac{n}{2}$.

2. Si Clémence ajoute un triangle supplémentaire au cas précédent, que deviennent les longueurs l et L ?

3. Clémence a aligné 56 triangles. Déterminer les longueurs l et L calculées par Léa.

Partie C

Observant tous les calculs de longueur de diagonales effectués, Léa conjecture deux propriétés :

1re propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre impair »

2e propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre premier »

On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel divisible seulement par 1 et lui-même ; par exemple 2, 11, 29 sont des nombres premiers et 1, 8, 33 ne le sont pas.

1. Valider ou invalider chacune de ces propriétés.

2. Peut-on affirmer que la racine carrée de tout nombre premier est la longueur possible d'une diagonale d'un quadrilatère ABCD du type ci-dessus ?

3. Pourquoi n'est-il pas possible d'obtenir une diagonale de longueur $\sqrt{2\,015}$?

4. Clémence a construit un quadrilatère dont une diagonale mesure $\sqrt{1\,015\,057}$. Combien de triangles a-t-elle utilisés ? Donner toutes les réponses possibles.

5. Clémence dit à sa sœur : « sur les grands quadrilatères, à chaque fois que l'on ajoute deux triangles, la diagonale augmente d'environ 1 ». Le constatez-vous aussi ? (détailler la démarche). Si oui, le démontrer.

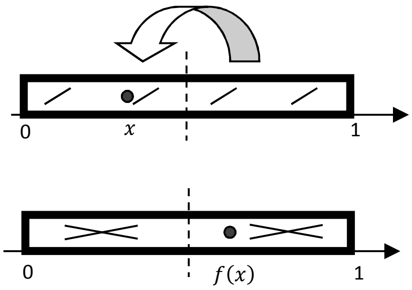
Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Exercice numéro 2

(proposé par le jury national)

On est les rois !



Le boulanger place une fève, replie la pâte (qu'il a, ici, préalablement striée) sur elle-même, et l'étale dans le sens de la longueur : celle-ci s'étire jusqu'à retrouver ses dimensions initiales. Cette transformation, que l'on peut répéter, a donné lieu à quelques études mathématiques, dont cet exercice s'inspire.

Partie A – La transformation du boulanger

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,,1]$ par :

$$f(x) = 2x \text{ si } x \leq \frac{1}{2} \text{ et } f(x) = 2(1-x) \text{ sinon.}$$

1. Montrer que l'image par f d'un élément de [0, 1] appartient à [0, 1].
2. Justifier pourquoi cette fonction f modélise le déplacement de la fève.

Partie B – Parcours d'une fève : cycles et cible
Les images successives par f d'un élément x de $[0\,,1]$ sont notées $x_1 = f(x)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ etc. Elles correspondent aux positions successives de la fève initialement placée à l'abscisse x.

1. Quelles sont les 9 positions qui suivent l'abscisse $\frac{1}{3}$? L'abscisse 0, 33 ? Commenter.
2. Est-il possible qu'une fève, placée à l'abscisse x, revienne à sa position de départ en un seul coup ? En deux coups (mais pas en un) ? En trois coups (mais ni en un ni en deux) ? Préciser à chaque fois toutes les valeurs de x pouvant répondre à la question.
3. Quand une fève placée à l'abscisse x vient, après un nombre fini d'étapes du processus, à occuper l'abscisse nulle, on dit que « x atteint sa cible ». Donner un exemple où x atteint sa cible, et un autre où x ne l'atteint pas.
4. Le nombre $\frac{2015}{2^{2015}}$ atteindra-t-il la cible ?
5. Déterminer tous les nombres de $[0\,,1]$ atteignant leur cible.

Partie C – Étude d'un algorithme.

1. Soit un nombre x dont on suppose qu'il atteint la cible. Modifier l'algorithme proposé en **Annexe** afin qu'il affiche, dans ce cas, le nombre d'étapes nécessaires pour rejoindre le réel 0 (on recopiera le nouveau code sur sa copie).
2. D'après la question **B.5**. (ou même **B.2.**), le nombre $\frac{1}{9}$ n'atteint pas sa cible. Comment devrait se comporter l'algorithme après avoir saisi $x = \frac{1}{9}$ en entrée ? Quand on le programme sur une machine de type PC ou calculette, toujours avec $x = \frac{1}{9}$ en initialisation, puis qu'on l'exécute, il affiche cependant en sortie obtenir $x = 0$ au bout d'une cinquantaine d'itérations. Avancer une explication.

Annexe (exercice numéro 2)

Variables
x est un élément de $[0\ ,1]$
Début
Saisir le nombre x compris entre 0 et 1
Tant que $x \neq 0$ **faire**
Si $x \leq \frac{1}{2}$ **alors**
x **prend la valeur** $2\,x$
Sinon
x **prend la valeur** $2(1-x)$
Fin tant que
Fin

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Exercice numéro 3

(proposé par le jury académique)

Partageons !

Dans ce problème, on souhaite partager différents triangles en deux puis trois domaines de même aire.

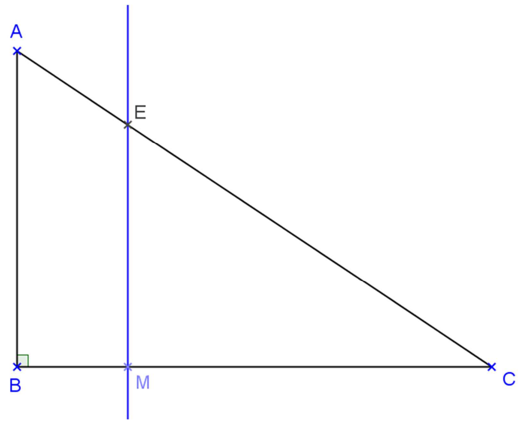
Partie A – Partageons en deux

1er cas – Triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que :
AB = 4 et BC = 6.

M est un point quelconque du segment [BC].

E désigne le point d'intersection de la parallèle à la droite (AB) passant par M. On note *x* la longueur BM.



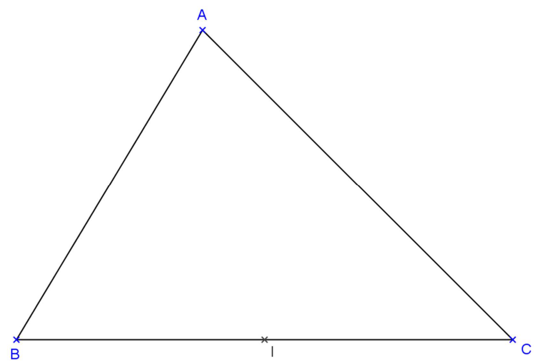
Démontrer qu'il existe une position du point M telle que la droite (EM) partage le triangle ABC en deux polygones de même aire. *Donner la valeur de x correspondante.*

2ème cas – Triangle quelconque

Soit ABC un triangle quelconque et I le milieu de [BC].

1. Proposer, **en justifiant**, un premier partage simple du triangle en deux triangles de même aire.

On souhaite maintenant déterminer un second partage possible.



2. Soit N un point quelconque sur le segment [BI].
On note E le point d'intersection du segment [AC] avec la parallèle à (AN) passant par I.

a. Faire une figure.

b. Démontrer que la droite (EN) partage le triangle ABC en deux domaines de même aire. Pour cela, on pourra, par exemple, commencer par comparer les aires des triangles NIE et AIE.

3. Proposer, de même, une méthode de construction dans le cas où le point N appartient au segment [IC].

Partie B – Partageons en trois triangles de même aire

Soit ABC un triangle quelconque.
Proposer, **en justifiant**, deux partages de nature différente du triangle ABC en trois triangles de même aire.

Exercice numéro 4

(proposé par le jury académique)

Une opération parabolique

On considère, dans un repère du plan, la parabole *P* représentant la fonction qui, à tout nombre réel x associe le nombre x^2 (fonction « carré »).

On s'intéresse alors à l'algorithme suivant :

- **Étape 1** : Choisir deux nombres entiers *a* et *b* strictement supérieurs à 1.
- **Étape 2** : Marquer sur la parabole le point d'abscisse – *a*.
- **Étape 3** : Marquer sur la parabole le point d'abscisse *b*.
- **Étape 4** : Tracer le segment formé par ces deux points.
- **Étape 5** : Afficher l'ordonnée du point d'intersection du segment obtenu avec l'axe des ordonnées.

1. On se place dans le cas où *a* = 2 et *b* = 3.
Démontrer qu'en appliquant l'algorithme, on obtient, à la cinquième étape, le nombre 6.

2. On a tracé, dans le repère ci-dessous, la courbe *P* de la fonction « carré ».

On a ensuite appliqué l'algorithme précédent à tous les couples (*a* ; *b*) d'entiers strictement supérieurs à 1.
La mise en œuvre de l'algorithme s'est traduite par le graphique ci-contre.
On s'intéresse aux points M de l'axe des ordonnées dont l'ordonnée est un **entier** strictement supérieur à 1.

Démontrer que M est un point par lequel ne passe aucun des segments tracés si et seulement si son ordonnée est un nombre premier.