

# Du coloriage à la gestion des conteneurs dans le port du Havre

## Le problème du coloriage de carte...

En 1852, Guthrie posa le problème suivant :

« Est-il possible de colorier avec seulement quatre couleurs n'importe quelle carte découpée en régions telle que deux régions partageant une frontière reçoivent deux couleurs distinctes? »



Carte des régions françaises

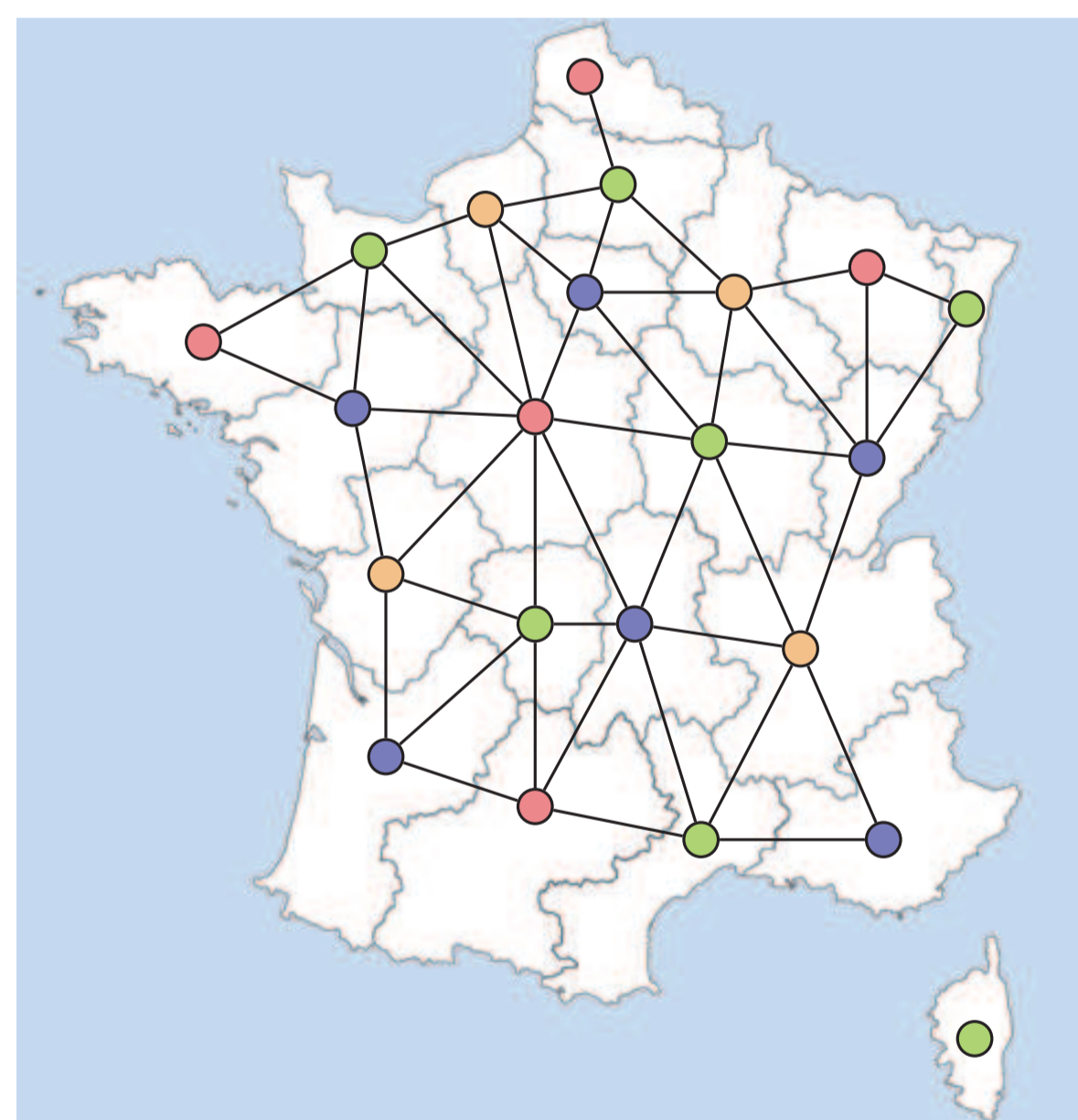


Coloration valide de la carte

- L'énoncé est très simple mais la preuve est difficile.
- Plus d'un siècle d'études pour montrer la validité de cette question.
- Preuve réalisée par Appel et Haken en 1976 qui nécessite d'étudier des milliers de configurations (environ 1200 heures de calcul).
- Le problème se modélisé à l'aide d'une structure dite graphe.

## ... un problème de coloration de graphe

Le problème de coloration de graphe est le problème qui consiste à déterminer une coloration minimale des sommets d'un graphe tels que deux sommets adjacents (sommets reliés par une arête) soient différentes.



Une coloration d'une carte est en réalité similaire à une coloration des sommets du graphe construit à partir de la carte.

## Application au jeu : résolution du problème du Sudoku

Le jeu du sudoku est devenu très populaire ces dernières années. Le but du jeu est de remplir chaque case d'une grille donnée (souvent  $9 \times 9$ ) à l'aide d'une série de chiffres allant de 1 à 9 selon les règles suivantes :

6	1		4		7			
			5		9			
2				6	5			8
4		9				6		
	7			5				3
1	8	7						9
		6	2					
		3	9			8	1	

- sur chaque ligne de la grille, tous les chiffres sont différents,
- sur chaque colonne de la grille, tous les chiffres sont différents,
- sur chaque sous-grille  $3 \times 3$ , tous les chiffres sont différents.

Résoudre ce problème revient à déterminer s'il existe une coloration avec neuf couleurs (une couleur par numéro) d'un graphe où :

- chaque sommet correspond à une case du sudoku,
- chaque arête correspond à un conflit entre deux cases.

## Modélisation du problème à l'aide d'un graphe

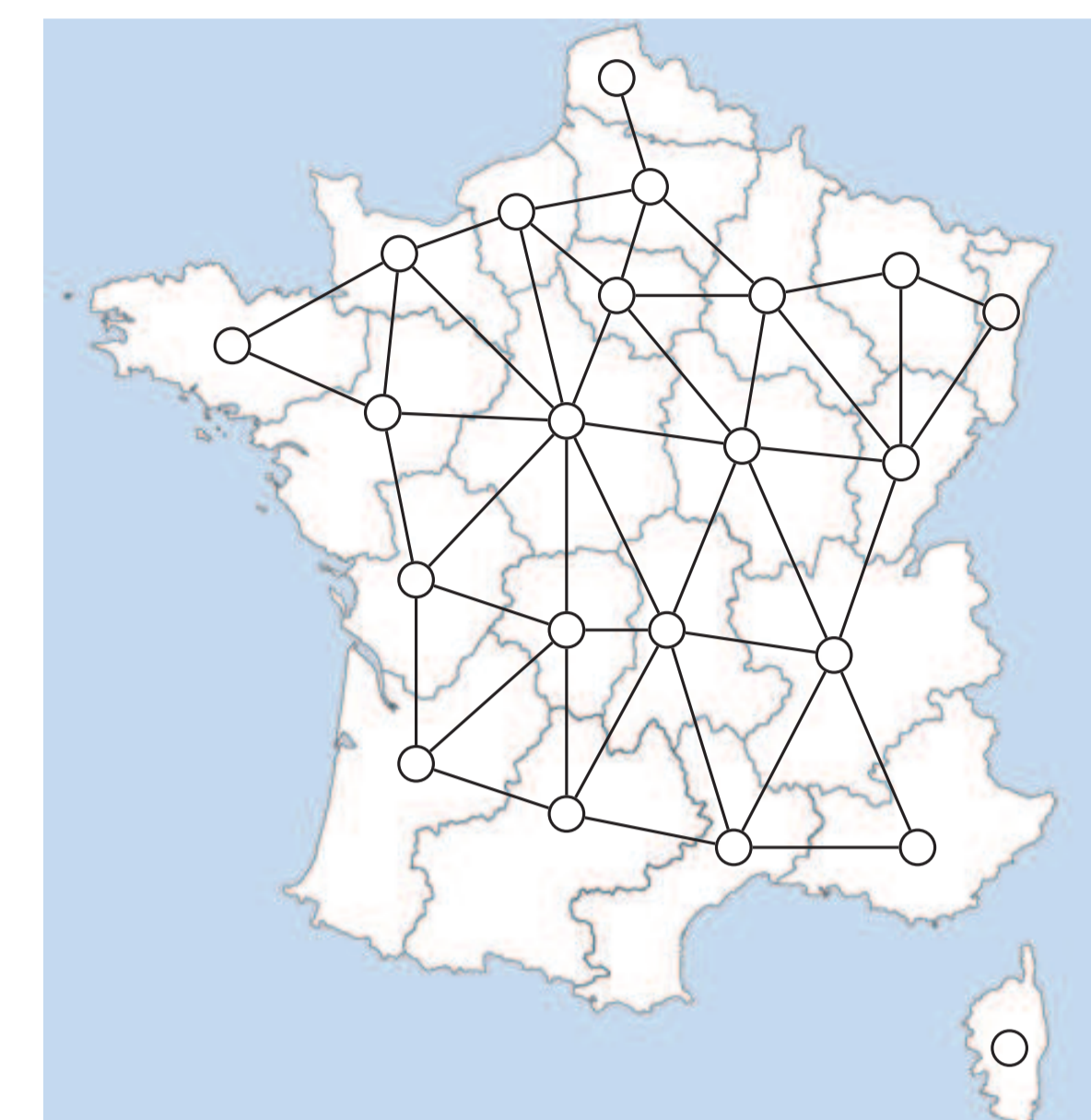
Un graphe est composé de deux ensembles d'objets :

- un ensemble de points, nommés **sommets**,
- un ensemble de liaisons entre deux points, nommées **arêtes**.

Un graphe est représenté par des cercles pour les sommets et des traits pour les arêtes.

Toute carte peut être transformée sous forme de graphe selon le principe suivant :

- un sommet est associé à chaque région de la carte,
- une arête est créée entre deux sommets si les deux régions associées partagent une frontière.

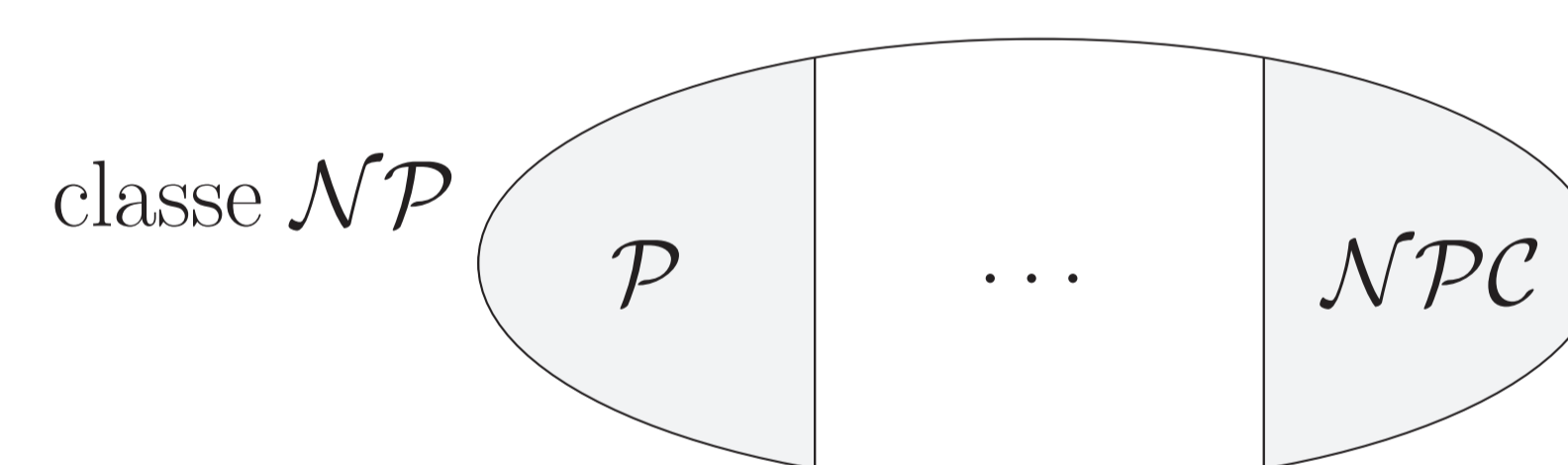


Transformation de la carte en graphe

## La difficulté du problème de coloration de graphe

En informatique, la complexité d'un problème est le temps de calcul nécessaire à sa résolution au moyen d'un algorithme (suite d'instructions et d'opérations). Ces problèmes sont classés selon leur difficulté :

- classe  $\mathcal{NP}$  : ensemble des problèmes pour lesquels il est possible de vérifier rapidement qu'une solution donnée est bonne,
- classe  $\mathcal{P}$  : ensemble des problèmes de  $\mathcal{NP}$  qui peuvent être résolus efficacement à l'aide d'un algorithme,
- classe  $\mathcal{NPC}$  : ensemble des problèmes de  $\mathcal{NP}$  qui sont jugés comme difficile. Le problème de coloration fait partie de cette famille.



Déterminer si  $\mathcal{NP} = \mathcal{P}$  reste une question ouverte à un million de dollars. Sa validation ou son rejet révolutionnerait le monde informatique.

## Application à l'industrie : l'entreposage de conteneurs

Le problème de coloration de graphe a de nombreuses applications dans l'industrie : allocation de fréquences en téléphonie mobile, gestion du trafic aérien, gestion d'emploi du temps, et bien d'autres applications... Par exemple, au sein du port du Havre, l'entreposage des conteneurs est soumis à plusieurs restrictions (différentes tailles de conteneurs, gestion des conteneurs dangereux, date d'arrivée/départ,...). Cette situation peut se ramener à colorier un graphe où chaque couleur correspond à une pile de stockage.

