Stage sur site lycée Fresnel
Simulations et probabilités

Avril 2013

I. Lancers de dés...

1. Lancer d'un ou deux dés : initiation à l'algorithme, loi des grands nombres

1. Programmer le lancer de 10 fois 2 dés (calculatrice, Algobox...).
2. *Pour aller plus loin*
   a) Introduire un compteur du nombre de 7 obtenus ; remplir à la main la grille suivante (par exemple), puis tracer la courbe des moyennes sur n échantillons de taille 10, en fonction de n.

1 ech.	2 ech.	5 ech.	10 ech.	15 ech.	20 ech.	25 ech.	30 ech.	40 ech.	50 ech.
Moyennes sur...									

   b) Pour N données entrées par un utilisateur, calculer la moyenne, en faisant afficher les résultats en temps direct.
   c) Construire un algorithme synthétisant les deux questions ci-dessus : 50 échantillons de 10 lancers de 2 dés, affichage de la moyenne des 7 obtenus en fonction du nombre d'échantillons.

2. Compteurs et diagrammes en bâtons

Reprendre l'algorithme du lancer de 2 dés, pour N lancers.
Pour chaque résultat, introduire un compteur (une liste est ici bien pratique).
Faire tracer le diagramme en bâtons des effectifs de 1, de 2, ... , de 12.

II. Loi binomiale

1. Simuler la loi binomiale

Accompagnement personnalisé en TS : révision et préparation à la loi normale
Une expérience aléatoire est constituée de 2 issues : succès ou échec ; la succès a une probabilité p.
Cette expérience est réalisée n fois de suite de manière indépendante.

1. X est la variable aléatoire comptant le nombre de succès. Préciser la loi suivie par X.
2. Inventer une situation de ce type ($n > 10$). Rédiger trois questions portant sur des calculs de probabilités.
3. Rédiger un algorithme qui simule une telle expérience, et qui affiche le nombre de réussites obtenues lors de la simulation.
4. On définit $n+1$ variables : $u[0]$, $u[1]$,..., $u[n]$. Toutes sont initalisées à 0.
   Lorsque l'expérience des n « tirages » de la question 2 est réalisée, si le nombre de réussites est k, alors $u[k]$ est incrémenté d'une unité.
   Rédiger un algorithme qui réalise 1000 fois l'expérience de la question 2, et qui calcule les $u[k]$.
5. Modifier l'algorithme précédent de manière à calculer, parmi les 1000 réalisations de n expériences, les fréquences des événements : « 0 réussite », « 1 réussite », ..., « n réussites ». Tracer le diagramme en bâtons de ces fréquences.

2. Intervalle de fluctuation

Rappel de définition
X_n est la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.
$F_n = \dfrac{X_n}{n}$ est la fréquence de réalisation de X_n.
L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de F_n est l'intervalle $\left[\dfrac{a}{n}; \dfrac{b}{n}\right]$ où :

- a est le plus petit entier tel que $p(X_n \leq a) > 0,025$,
- b est le plus petit entier tel que $p(X_n \leq b) \geq 0,975$.

Dans un repère orthonormé, et pour un n fixé, représenter les bornes $\dfrac{a}{n}$ et $\dfrac{b}{n}$ en fonction de p.
n et le pas de balayage de p peuvent être fixés par l'utilisateur.

III. Lois continues

1. Simulation d'une loi uniforme

Introduction aux fonctions densités et à l'intégration en TS
Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (échelle : 2 cm), tracer le quart de cercle de centre O, de rayon 2, d'extrémités $A(2; 0)$ et $B(0; 2)$.
Un point M est placé au hasard sur ce quart de cercle. On considère alors le triangle OMB.
Objectif : Déterminer la probabilité que OMB soit de périmètre supérieur à 6.

1. Choisir une méthode pour placer M de façon aléatoire sur le quart de cercle. Associer cette méthode à un paramètre numérique.
2. Rédiger un algorithme qui trace N points aléatoires sur le quart de cercle, et qui les colore différemment suivant que OMB a un périmètre supérieur ou inférieur à 6. L'algorithme affichera ensuite la fréquence de réalisation de l'événement « le périmètre de OMB est supérieur à 6 ».

2. Simulation de la décomposition d'un radio-élément

Un atome radioactif a une probabilité a de se désintégrer au cours d'une unité de temps.
Il s'agit ici est de simuler ces désintégrations pour un ensemble d'atomes, et de tracer l'histogramme des fréquences de désintégration par unité de temps.
Dans le morceau d'algorithme ci-contre :

- la variable N représente le nombre d'atomes radioactifs à un instant donné ;
- $Nnew$ compte les atomes « survivants » après une unité de temps ;
- a est la probabilité de désintégration d'un atome — donc la probabilité que cet atome « survive » est...

Compléter cet algorithme, avec les consignes suivantes :

- à l'instant initial, il y a N_0 atomes radioactifs ;
- l'expérience se poursuit jusqu'à ce qu'il ne reste plus d'atomes radioactifs ;
- pour chaque unité de temps, tracer une barre d'histogramme de hauteur la fréquence des atomes désintégrés durant cette unité.

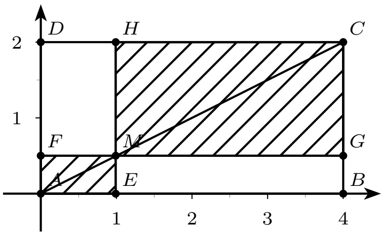
```
POUR compteur ALLANT_DE 1 A N
   DEBUT_POUR
   SI (random()¡1-a) ALORS
      DEBUT_SI
      Nnew PREND_LA_VALEUR Nnew + 1
      FIN_SI
   FIN_POUR
```

IV. Aires

1. Fléchettes en seconde

Partie A — Modélisation d'une expérience aléatoire

Le rectangle $ABCD$ a pour côtés $AB = 4$ et $AD = 2$ dans un repère orthonormé.
Le point M est sur la diagonale $[AC]$ et partage le rectangle en quatre sous-rectangles, comme ci-contre.
Une étude préliminaire (fonctions) a permis d'établir l'aire de la surface hachurée en fonction de $x = AE$.
Un dispositif automatique lance une fléchette au hasard dans $ABCD$.
Les événements A et B sont définis ainsi :



- A : « L'abscisse du point d'impact de la fléchette est inférieure ou égale à l'abscisse de M »;
- B : « L'ordonnée du point d'impact de la fléchette est inférieure ou égale à l'ordonnée de M ».

1. Traduire, à l'aide des événements A et B et des symboles $\cup$ et $\cap$, différents événements : le point d'impact de la fléchette est dans tel ou tel rectangle, dans la zone hachurée, dans la zone non hachurée…
2. Traduire ces événements sous forme de phrases faisant intervenir x, y, des inégalités, les conjonctions **et** et **ou**.

Partie B — Algorithme de modélisation

Concevoir un algorithme répondant aux conditions suivantes :
- l'utilisateur entre un nombre n ;
- il est réalisé n lancers de fléchettes sur la cible rectangulaire $ABCD$;
- un compteur enregistre les lancers qui tombent dans la partie hachurée ;
- en conclusion, il est affiché la fréquence des lancers ayant touché la partie hachurée.

2. Fléchettes en terminale : bac S 2006, la Réunion

Aménager l'énoncé suivant pour y introduire :
- une simulation algorithmique ;
- de la fluctuation d'échantillonnage, de manière à estimer la rapidité de convergence en fonction du nombre de fléchettes.

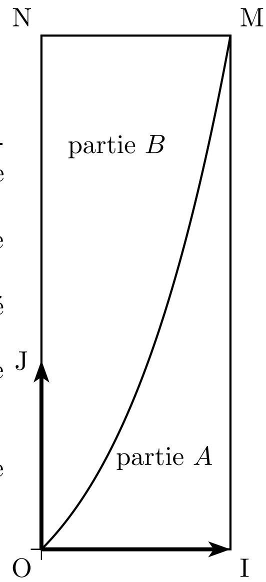
Première partie

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Deuxième partie

La figure ci-dessous représente une cible rectangulaire $OIMN$ telle que, dans le repère orthonormal $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OI},\ \overrightarrow{OJ}\right)$, la ligne courbe $\mathcal{C}$ reliant le point O au point M est une partie de la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$. Cette courbe partage la cible $OIMN$ en deux parties A et B comme l'indique la figure ci-dessous.
Un jeu consiste à lancer une fléchette qui atteint soit l'extérieur de la cible, soit l'une des parties A ou B. On admet que la fléchette ne peut atteindre aucune des frontières de la cible, ni la courbe $\mathcal{C}$.

Une étude statistique a montré que la fléchette tombe à l'extérieur de la cible avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$ et que les probabilités d'atteindre les parties A et B sont proportionnelles à leurs aires respectives.



1. Démontrer que la probabilité d'atteindre la partie A est égale à $\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.
   Quelle est la probabilité d'atteindre la partie B ?
2. On lance de manière indépendante trois fléchettes.
   a) Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de fléchettes ayant atteint la partie A. Définir la loi de probabilité de X. En déduire la valeur exacte de son espérance mathématique.
   b) Soit E l'évènement : « Exactement deux fléchettes atteignent la partie A ». Calculer une valeur approchée au millième de la probabilité de E.
   c) Soit F l'évènement : « les trois fléchettes atteignent la partie B ». Calculer la probabilité de F (on donnera la valeur exacte).
   Sachant qu'aucune fléchette n'a atteint l'extérieur de la cible, quelle est la probabilité que toutes les trois se trouvent dans la partie B ?
3. On lance cette fois de manière indépendante n fléchettes.
   a) Déterminer en fonction de n la probabilité p pour qu'au moins une des fléchettes atteigne la partie A.
   b) Déterminer le plus petit naturel n tel que $p_n \geqslant 0,99$.