Stage sur site lycée Fresnel
Suites et algorithmes

Avril 2013

I. Comportements asymptotiques

1. Limite infinie

Extrait du programme de terminale S
« Dans le cas d'une limite infinie, étant donnés une suite croissante (u_n) et un nombre réel A, déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel u_n est supérieur à A. »

Rédiger un algorithme, portant sur un exemple, qui illustre cet aspect du programme avec une suite récurrente.
Trouver une suite qui fasse « planter » cet algorithme.

2. Convergence et approximation

Inspiré du bac S, sujet Métropole septembre 2012.
Soit a un réel strictement positif, et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{0\}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$.
À partir d'un premier terme u_0 non nul, on définit la suite (u_n) par la relation : $u_{n+1} = f(u_n)$.
L'étude de la fonction et un raisonnement par récurrence montrent que (u_n) converge vers $\sqrt{a}$ ou $-\sqrt{a}$.
Rédiger un algorithme qui donne une valeur approchée de la limite de (u_n) dans tous les cas, à une précision entrée par l'utilisateur.
Note : on peut commencer par le cas où $u_0 > 0$ et où (u_n) est décroissante.

II. Autour d'un énoncé : bac S, Liban 2005

Pistes d'exploration

Lire l'énoncé ci-après, puis explorer autour de ce problème à l'aide des pistes suivantes.

1. Faire calculer, en utilisant la relation $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$, les termes de la suite (u_n) :
   - par un (des) tableur(s) ;
   - par une calculatrice, voire plusieurs ;
   - par Algobox ;
   - par XCAS, en évaluant les résultats (fonction `evalf`) ;
   - par Scilab...
2. Essayer de calculer, avec ces mêmes logiciels, les termes de $(v_n - u_n)$ en prenant pour u_0 la valeur approchée affichée par le logiciel. Surprises garanties...

L'énoncé

Partie A

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction $f \ : \ t \longmapsto (2-t)\mathrm{e}^t$ est une primitive de $g \ : \ t \longmapsto (1-t)\mathrm{e}^t$ sur $[0 \ ; \ 1]$.
   En déduire la valeur de u_1.
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul : $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad$ (R).

Partie B

On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (u_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

Valeur de n	Valeur de u_n affichée par la première calculatrice	Valeur de u_n affichée par le deuxième calculatrice
1	7,182 818 284 5E−01	7,182 818 284 6E−01
2	4,365 636 569 1E−01	4,365 636 569 2E−01
3	3,096 909 707 5E−01	3,096 909 707 6E−01
4	2,387 638 830 1E−01	2,387 638 830 4E−01
5	1,938 194 150 8E−01	1,938 194 152 0E−01
6	1,629 164 905 1E−01	1,629 164 912 0E−01
7	1,404 154 335 81E−01	1,404 154 384 0E−01
8	1,233 234 686 9E−01	1,233 235 072 0E−01
9	1,099 112 182 8E−01	1,099 115 648 0E−01
10	9,911 218 282 5E−02	9,911 564 800 0E−01
11	9,023 401 108 0E−02	9,027 212 800 0E−02
12	8,280 813 296 3E−02	8,326 553 600 0E−02
13	7,650 572 852 2E−02	8,245 196 800 0E−02
14	7,108 019 930 9E−02	1,543 275 520 0E−01
15	6,620 298 963 6E−02	1,314 913 280 06E+00
16	5,924 783 418 6E−02	2,003 861 248 0E+01
17	7,213 181 161 2E−03	3,396 564 121 6E+02
18	−8,701 627 390 9E−01	6,112 815 418 9E+03
19	−1,753 309 204 2E+01	1,161 424 929 6E+05
20	−3,516 618 408 5E+02	2,322 848 859 2E+06
21	−7,385 898 658 0E+03	4,877 982 504 3E+07
22	−1,624 907 704 7E+05	1,073 156 149 9E+09
23	−3,737 288 720 9E+06	2,468 259 144 8E+10
24	−8,969 493 030 2E+07	5,923 821 947E+11
25	−2,242 372 585E+09	1,480 955 486 9E+13

Partie C

Dans cette partie on se propose d'étudier la suite (u_n) à partir de la définition :

pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant 0$.
2. a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0~;~1]$ et pour tout entier naturel non nul n

$$(1-t)^n\mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e} \times (1-t)^n.$$

   b) En déduire que pour tout n non nul :

$$u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (u_n) : $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$.

Étant donné un réel a, on considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = a \text{ et pour tout entier naturel non nul } n,\ v_{n+1} = (n+1)v_n - 1$$

1. En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n + (n!)(a+2-\mathrm{e})$ où $n!$ désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.
2. Étudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a.
   (On rappelle que $\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$.)
3. En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.