Olympiades nationales de mathématiques 2019

Classes de première (toutes séries sauf S)

Académies de Caen et de Rouen

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Sauf en cas de force majeure aucun candidat n'est autorisé à quitter la salle de composition moins de deux heures après le début.

Les calculatrices sont autorisées.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Première partie de l'épreuve

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Triangles à côtés entiers

On dit qu'un triangle est un triangle entier si les longueurs de ses trois côtés sont des entiers naturels non nuls.
On rappelle la propriété dite de l'« inégalité triangulaire », caractéristique de tout triangle non aplati : la longueur de chacun des côtés est strictement inférieure à la somme des longueurs des deux autres.

1. *a.* Parmi les triplets (x, y, z) suivants, indiquer lequel représente les longueurs des côtés d'un triangle entier non aplati, puis comment tracer ce triangle et avec quels outils :

(4, 4, 5) ; (3, 6, 9) ; (2, 2, 6)

b. Quelles sont les valeurs possibles de l'entier z si $(15, 19, z)$ désigne les longueurs des trois côtés d'un triangle entier non aplati rangées par ordre croissant (soit : $z \geq 19$) ?

c. Étant donné trois entiers naturels non nuls x, y et z tels que $x \leq y \leq z$, pourquoi suffit-il d'ajouter une seule condition (à préciser) pour que le triplet (x, y, z) désigne les longueurs des côtés d'un triangle entier non aplati ?

2. Soit p un entier naturel non nul. On note E_p l'ensemble des triplets d'entiers naturels *rangés par ordre croissant* $x \leq y \leq z$ et désignant les côtés d'un triangle entier non aplati dont le périmètre est égal à p.
Ainsi obtiendrait-on $E_9 = \{(1, 4, 4), (2, 3, 4), (3, 3, 3)\}$.
a. Si le triplet (x, y, z) appartient à E_{18}, quelles sont les valeurs maximale et minimale pour z ?
b. Donner la composition de E_{18} et représenter dans un repère orthonormé l'ensemble points de coordonnées (x, y) pour lesquels il existe un entier naturel z tel que $(x, y, z) \in E_{18}$. Vérifier que ces points se situent à l'intérieur ou sur les bords d'un triangle dont les sommets ont des coordonnées entières.

3. *a.* Justifier que si $(x, y, z) \in E_p$ alors $(x + 1, y + 1, z + 1) \in E_{p+3}$.

b. Soit $(x, y, z) \in E_{p+3}$. Déterminer une condition sur x, y et z pour que $(x - 1, y - 1, z - 1) \in E_p$.

c. En déduire que si p est impair alors E_p et E_{p+3} ont le même nombre d'éléments.

4. Étude de $E_{2\,019}$.
a. $E_{2\,019}$ contient-il un triplet (x, y, z) correspondant à un triangle équilatéral ?
b. $E_{2\,019}$ contient-il des triplets (x, y, z) correspondant à des triangles isocèles non équilatéraux ? Si oui combien ?
c. Montrer que si $E_{2\,019}$ contient un triplet (x, y, z) correspondant à un triangle rectangle alors
$2\,019^2 = 4\,038\,(x + y) - 2xy$.
En déduire que $E_{2\,019}$ ne contient pas de triangle rectangle.

5. Dans cette question on se propose de dénombrer $E_{2\,019}$.

a. Soit $(x, y, z) \in E_{2\,022}$. On rappelle que $x \leq y \leq z$. Établir que $x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$.

b. Réciproquement, montrer que si $x \leq y$, $x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$ alors

$$(x, y, 2\,022 - x - y) \in E_{2\,022}.$$

c. Pourquoi, dans un repère orthonormé, l'ensemble des points à coordonnées entières positives (x, y) telles que $x \leq y$, $x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$ constitue-t-il l'ensemble des points à coordonnées entières d'un triangle qui est rectangle ? En déterminer l'aire $\mathcal{A}$ ainsi que le nombre de points à coordonnées entières situés sur ses côtés.

d. On admet le théorème de Pick : « Si un polygone $\boldsymbol{P}$ est tel que tous ses sommets sont à coordonnées entières dans un repère orthonormé alors son aire $\mathcal{A}$ est donnée par la formule $\mathcal{A} = i + \frac{j}{2} - 1$ où i désigne le nombre de points à coordonnées entières situés à l'intérieur de $\boldsymbol{P}$ et j le nombre de ceux situés sur les côtés de $\boldsymbol{P}$. »

En déduire le nombre de triplets de $E_{2\,022}$ puis celui de $E_{2\,019}$.

6. Une solution algorithmique.

De manière générale, concevoir un programme (à retranscrire sur la copie) permettant d'énumérer et de dénombrer E_p. Le tester sur E_{18} et sur $E_{2\,019}$.

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

AGADADAGA

Dans cet exercice, on appellera *mot* toute suite de lettres formée des lettres A, D et G.
Par exemple : ADD, A, AAADG sont des *mots*.
Astrid possède un logiciel qui fonctionne de la manière suivante : un utilisateur entre un *mot* et, après un clic sur EXÉCUTER, chaque lettre A du *mot* (s'il y en a) est remplacée par le *mot* AGADADAGA. Ceci donne un nouveau *mot*.
Par exemple, si l'utilisateur rentre le *mot* AGA, on obtient le *mot* AGADADAGAGAGADADAGA. Un deuxième clic sur EXÉCUTER réitère la transformation décrite ci-dessus au nouveau *mot*, et ainsi de suite.

1. Quels sont les mots qui restent inchangés quand on clique sur EXÉCUTER ?

Traitement de texte

Astrid rentre le *mot* A.

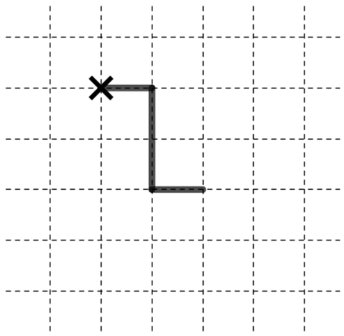
2. Quel *mot* obtient-elle après avoir cliqué deux fois sur EXÉCUTER ?

3. Combien de clics au minimum faut-il pour obtenir un *mot* contenant un milliard de A ?

4. Après 20 clics, combien le mot obtenu contient-il de lettres D ?

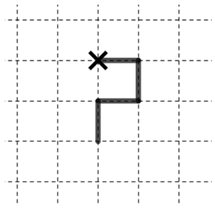
Motif

Astrid souhaite maintenant dessiner un motif sur une feuille de papier quadrillé, en utilisant le dernier mot obtenu par le logiciel. Pour cela, elle lit de gauche à droite chaque lettre de ce mot et trace une ligne brisée sans lever le stylo en suivant les consignes suivantes :



- Le point de départ de la ligne est une croix située sur un nœud du quadrillage ;
- si la lettre lue est A, elle trace horizontalement et de gauche à droite un segment de longueur un carreau ;
- si la lettre lue est G, elle tourne **la feuille** d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre ;
- si la lettre lue est D, elle tourne **la feuille** d'un quart de tour dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ;
- quand toutes les lettres sont lues, elle remet **la feuille** dans la position initiale pour regarder le motif obtenu.

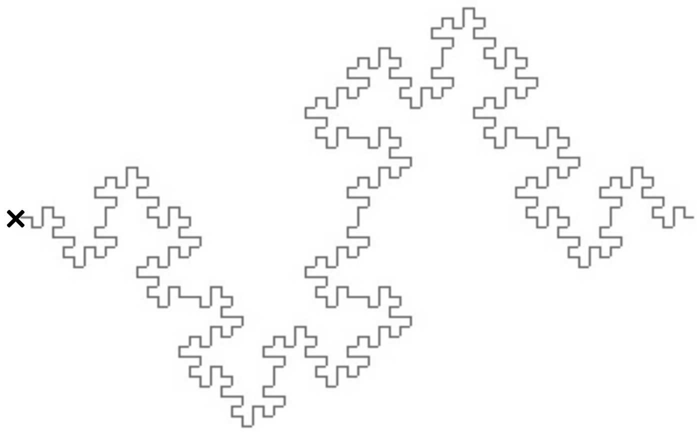
Par exemple, le motif obtenu à partir du *mot* ADAAGA est représenté à gauche.



5. Astrid a réalisé le motif de droite. Quel *mot* avait-elle obtenu ?

6. Astrid entre le *mot* A et clique deux fois sur EXÉCUTER. Dessiner le motif obtenu.

7. Astrid reprogramme le logiciel et remplace le mot AGADADAGA par un autre mot dont elle ne se souvient plus. Elle rentre le mot A et obtient le motif ci-dessous après avoir cliqué trois fois sur EXÉCUTER. Quel est le mot oublié par Astrid ?



8. On s'intéresse dans cette question uniquement aux motifs obtenus à partir de *mots* qui commencent par la lettre A, et se poursuivent en juxtaposant des séquences GA ou DA. On appelle *largeur* du motif le nombre de carreaux compris entre les points les plus à gauche et à droite du motif obtenu. Par exemple, la largeur du motif obtenu à partir du *mot* ADAGAGA est 2.

a. Quelle est la largeur du motif obtenu à partir du *mot* AGAGADA ?

b. Un *mot* conforme à l'hypothèse du **8.** comporte dix lettres D et dix lettres G. Déterminer toutes les largeurs possibles du motif obtenu.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques 2019

RÉGION ACADÉMIQUE NORMANDIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Seconde partie de l'épreuve

Exercices académiques

Classes de première (toutes séries sauf S)

Académies de Caen et de Rouen

Les calculatrices sont autorisées.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Seconde partie de l'épreuve

Exercice académique numéro 1

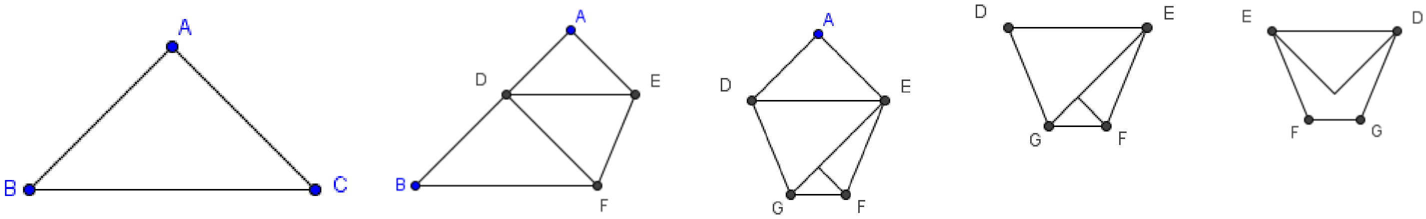
Origamis

On ne considère dans cet exercice que des feuilles de papier de format A4 c'est-à-dire de dimensions 21 cm sur 29,7 cm.

Partie A : création d'un cornet par pliages

À partir d'une feuille A4, il s'agit de réaliser, par découpage et pliages successifs, un cornet.

Voici le protocole de construction de ce cornet, illustré ci-dessous :

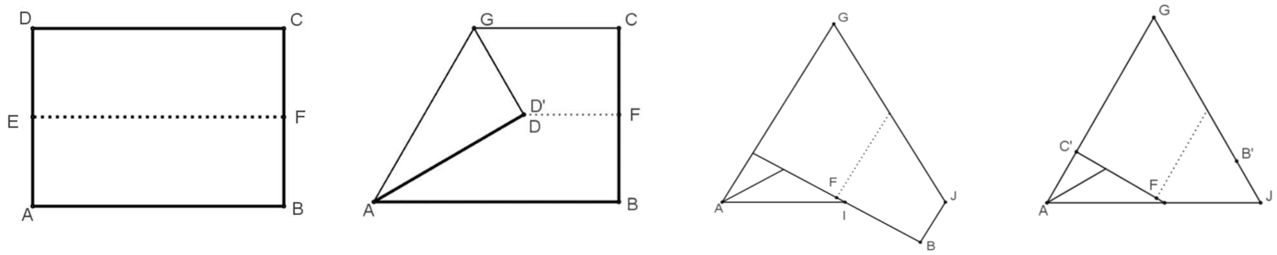


- **Étape 1 :** découper dans la feuille de format A4 un carré $\mathrm{ABA'C}$ de 21 cm de côté.
- **Étape 2 :** plier ce carré suivant l'une de ses diagonales pour obtenir un triangle rectangle isocèle vérifiant $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 21$ cm.
- **Étape 3 :** placer le sommet C sur un point D du segment $[\mathrm{AB}]$ tel que, après pliage, la droite (DE) soit parallèle à la droite (BC).
- **Étape 4 :** effectuer une démarche similaire à partir du sommet B.
- **Étape 5 :** plier les deux triangles supérieurs, l'un devant, l'autre derrière.

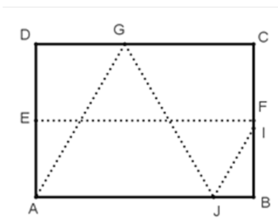
Lorsque l'on mesure AD, on obtient 8,7 cm (valeur arrondie au mm).
Quelle est la valeur exacte de la distance AD ?

Partie B : réalisation d'un triangle particulier

À partir d'une feuille A4, il s'agit maintenant de réaliser, par pliages successifs, un triangle particulier. Cette feuille est modélisée par un rectangle ABCD. E et F désignent respectivement les milieux des segments $[\mathrm{AD}]$ et $[\mathrm{BC}]$.
Voici le protocole de construction de ce triangle, illustré ci-dessous :



Le rectangle ci-contre correspond à la feuille A4 dépliée après avoir réalisé le triangle.



On souhaite déterminer la nature du triangle ainsi construit.

1. Montrer que la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{GAJ}}$ est égale à 60°.
2. Montrer que l'on rabat le point C sur le segment $[\mathrm{AG}]$.
3. Montrer que l'on rabat le point B sur le segment $[\mathrm{JG}]$.

Conclure.

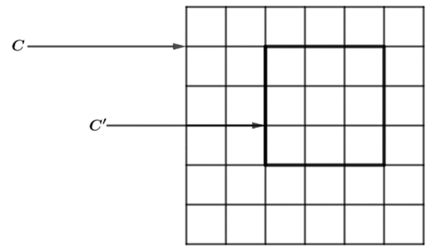
Exercice académique numéro 2

Des carrés et des cases

Pour répondre aux questions de cet exercice, on pourra, si besoin, colorier les cases des carrés figurant en annexe (à rendre avec la copie).

Définition : dans un carré C composé de $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ cases, on appelle **sous-carré** $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{m}$ de C tout carré composé de $m \times m$ cases contenu dans C.

Exemple :



C' est un sous-carré 3×3 du carré C composé de 6×6 cases.

A. Un cas particulier

On considère, dans cette partie, un **carré $\boldsymbol{C}$ composé de $\boldsymbol{5} \times \boldsymbol{5}$** cases et C' **un sous-carré $\boldsymbol{3} \times \boldsymbol{3}$** du carré C.

1. Combien existe-t-il de positions possibles de C' dans le carré C ?
2. Disposer une case noire (ou plusieurs) dans le carré C figurant en annexe pour que **chaque** sous-carré C' contienne exactement une case noire.
3. Disposer des cases noires dans le carré C figurant en annexe pour que **chaque** sous-carré C' contienne exactement :

   a. deux cases noires ;
   b. trois cases noires ;
   c. quatre cases noires.

4. Montrer que si l'on peut disposer des cases noires dans le carré C pour que chaque sous-carré C' contienne exactement p cases noires, on pourra placer des cases noires dans le carré C pour que chaque sous-carré C' contienne exactement $9 - p$ cases noires.
5. Que peut-on en conclure quant au nombre de cases noires qui peuvent être contenues dans chaque sous-carré C' d'un carré C ?

B. Généralisation

On considère dans cette partie, pour tout entier naturel k tel que $k \geq 2$:

- **un carré $\boldsymbol{C}$ composé de $(\boldsymbol{2k+1}) \times (\boldsymbol{2k+1})$ cases ;**
- **un sous-carré $(\boldsymbol{2k-1}) \times (\boldsymbol{2k-1})$ du carré $\boldsymbol{C}$, noté $\boldsymbol{C}$'.**

1. Combien existe-t-il de positions possibles de C' dans C ?
2. Justifier que, si p est un entier naturel tel que $p \leq (2k-3)^2$, on peut disposer des cases noires dans C de telle façon que tout sous-carré C' contienne exactement p cases noires.
3. En déduire que, si p est un entier naturel tel que $p \leq (2k-3)^2$, on pourra placer des cases noires dans C pour que chaque sous-carré C' contienne exactement $(2k-1)^2 - p$ cases noires.

Exercice académique numéro 2 (*des carrés et des cases) :* annexe