Olympiades académiques de mathématiques

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Classes de premières (toutes séries sauf S)

Académie de Rouen

Mercredi 16 mars

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Sauf cas de force majeure, aucun candidat n'est autorisé à quitter définitivement la salle de composition moins de 2 heures après le début.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Première partie de l'épreuve

Exercice national numéro 1 : Échanges thermiques

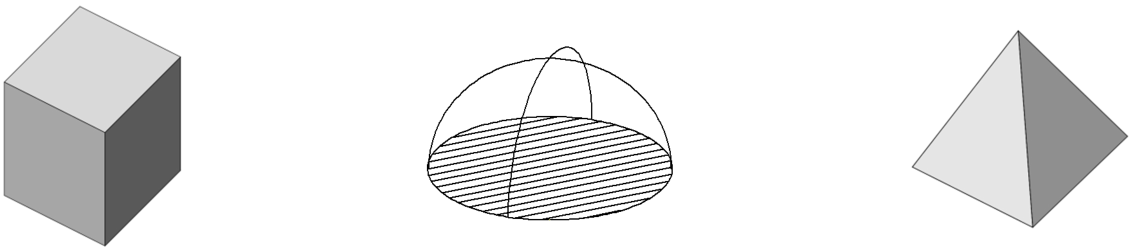
En architecture, on appelle facteur de compacité d'un bâtiment le rapport de la surface extérieure – y compris la base en contact avec le sol – de ce bâtiment, mesurée en m^2, *à son volume, mesuré en* m^3. *Le facteur de compacité* $\boldsymbol{c} = \frac{S}{V}$, exprimé en m^{-1}, *donne une première évaluation grossière des performances thermiques d'une construction d'habitation.*

1. Calculs de compacité pour quelques volumes usuels, dessinés ci-dessous.

a. Déterminer le facteur de compacité d'un cube de côté a.

b. Déterminer celui d'une demi-sphère de rayon r. On rappelle que le volume d'une sphère de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^3$ et que sa surface a pour aire $4\pi r^2$.

c. Déterminer celui d'une pyramide régulière à base carrée de côté a, et de hauteur verticale a.



d. En quoi, d'après vous, le facteur de compacité est-il lié aux performances thermiques d'un bâtiment ?

2. On se propose d'étudier le facteur de compacité d'un pavé droit de volume 1 dont les dimensions en mètres sont x, y et z .

a. Vérifier que pour tous nombres a, b et c :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$$

b. En déduire que pour tous nombres réels positifs a, b et c, $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

c. En déduire que pour tous nombres réels positifs A, B et C dont le produit est égal à 1 :

$$A + B + C \geq 3.$$

d. Montrer que le facteur de compacité de ce pavé est : $c = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$.

e. Quel est le pavé droit de volume 1 qui rend minimal le facteur de compacité ?

3. Dans cette question, on désire déterminer tous les pavés droits dont le facteur de compacité est égal à 1 et dont les dimensions p, q et r, exprimées en mètres, sont des nombres entiers. On prendra $p \leq q \leq r$.

a. Établir que résoudre ce problème consiste à déterminer les triplets ordonnés d'entiers p, q et r tels que

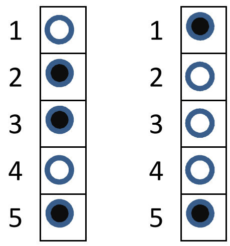
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}.$$

b. Démontrer que $3 \leq p \leq 6$.

c. Montrer que si $p = 3$ alors $7 \leq q \leq 12$.

d. Terminer la résolution.

Exercice national numéro 2 : *Demi-tour* !



Avant Après

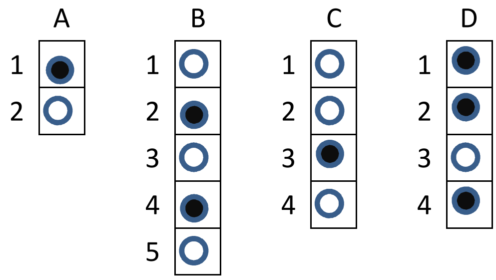
On dispose n pions verticalement. Ils sont noirs sur une face, blancs sur l'autre, et sont numérotés de 1 à n,. Au début du jeu, chaque pion présente aléatoirement sa face noire ou sa face blanche. **À chaque coup – qu'on appelle une *opération* dans toute la suite– on retourne un des pions *et* tous ses voisins du dessus.** Le dessin ci-contre donne l'exemple du changement qu'apporte à une configuration initiale une opération avec le troisième jeton.

L'objectif du jeu est de trouver une séquence d'opérations telle que tous les pions montrent leur face blanche.

1. L'ordre dans lequel se succèdent deux opérations a-t-il de l'importance ?

2. Quel est l'effet combiné de deux opérations identiques ?

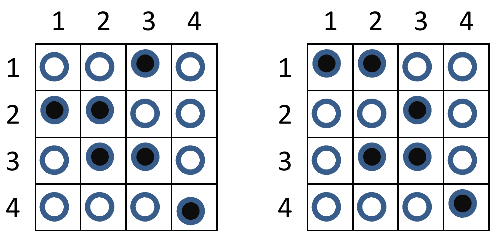
3. Indiquer les numéros des pions à retourner pour ne voir que des faces blanches, dans les situations représentées ci-contre.



4. On donne l'algorithme suivant, pour une configuration de n cases :
Pour k allant de n à 1 par pas de -1
Si le jeton k est noir, effectuer une opération avec ce jeton
Fin Pour
a. Expliquer pourquoi cet algorithme blanchit la colonne en un minimum d'opérations. Combien d'opérations met-il au maximum en œuvre ?
b. Donner un exemple de configuration de n cases nécessitant n opérations.

5. Dans cette question et les suivantes, on change légèrement les règles du jeu en en proposant des variantes :
a. À chaque coup – qu'on appelle toujours une opération – on retourne un des pions et son voisin du dessus uniquement (quand il en a un). Prouver qu'il est toujours possible de blanchir la colonne.
b. À chaque coup – qu'on appelle toujours une opération – on retourne un des pions et son voisin du dessus quand il en a un, le dernier sinon. Ainsi, agir sur le pion n°1 retourne et le n°1 et le n° n. Donner, en le justifiant, un exemple de configuration à 4 jetons qui soit impossible à blanchir.

6. Jeu à deux dimensions.



Avant Après

On considère maintenant un plateau carré de $n \times n$ cases. Les jetons ont une face noire et une blanche. Le but du jeu est de rendre visible les seules faces blanches. Les cases sont numérotées de haut en bas et de gauche à droite, et le jeton situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est appelé jeton (i, j). Une *opération* est définie ainsi : **lorsque l'on retourne le jeton $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$, on forme un rectangle dont le coin supérieur gauche est le jeton $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ et le coin inférieur droit est le jeton $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$: tous les jetons situés dans ce rectangle sont retournés.** L'exemple ci-dessus montre ce qu'il se passe quand on retourne le jeton (2, 3) d'un plateau 4 x 4.

Proposer un algorithme qui fasse apparaître toutes les faces blanches d'un plateau $n \times n$ en moins de n^2 opérations.

7. Proposer un jeu analogue à trois dimensions.

Seconde partie de l'épreuve

Exercice académique numéro 1 : Un aller-retour harmonique

Nous nous intéressons à une compétition sportive où les participants doivent enchaîner deux disciplines : la course à pied et le vélo.
Le parcours consiste en un aller-retour entre deux villes, l'aller s'effectuant à pied, en courant et le retour à vélo.
Nous allons étudier plus particulièrement la course de deux participantes : Lou et Anna.

1. Comparaisons
Lou couvre habituellement la distance aller à la vitesse moyenne de 15 km/h et le retour à la vitesse moyenne de 35 km/h.
a. Calculer la durée totale du trajet aller-retour de Lou en fonction de la distance *d* qui sépare les deux villes.
b. À l'entrainement, Anna effectue le trajet aller-retour à la vitesse moyenne de 20 km/h.
Entre Lou et Anna, laquelle réalise la meilleure performance ?

2. Performances
Afin de progresser, Anna veut augmenter sa vitesse moyenne sur l'aller-retour.
Elle sait cependant qu'en course à pied, elle ne peut pas faire mieux que 15 km/h.
Elle est donc consciente qu'il lui faut augmenter sa vitesse à vélo.
Notons x sa vitesse moyenne sur le retour à vélo et $v\ (x)$ sa vitesse moyenne sur l'aller-retour (toutes deux exprimées en km/h).
a. Démontrer que si Anna optimise sa course à pied, $v\ (x) = \frac{30x}{15+x}$.
b. À quelle vitesse Anna doit-elle rouler sur le retour pour que sa vitesse moyenne sur l'aller-retour soit de 22 km/h ?
c. Démontrer que, quelle que soit la vitesse moyenne d'Anna sur le retour à vélo, sa vitesse moyenne sur l'aller-retour ne pourra jamais dépasser 30 km/h.

Exercice académique numéro 2 : Retouche d'images

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du noir au blanc en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un nombre réel x de la façon suivante :

- x = 0 pour le noir ;
- x = 1 pour le blanc ;
- x varie de 0 à 1 pour toutes les nuances de gris intermédiaires (du foncé au clair).

L'image A, ci-dessous, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.
Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».
Une fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] est dite « **fonction de retouche** » si elle possède au moins les trois propriétés suivantes :

- $f\ (0) = 0$;
- $f\ (1) = 1$;
- f est croissante sur l'intervalle [0 ; 1].

Une nuance codée x_0 est dite :

- assombrie par la fonction f si $f(x_0) \leq x_0$;
- éclaircie par la fonction f si $f(x_0) \geq x_0$.

Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $0{,}2^2 = 0{,}04$.
L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.
Si $f\ (x) = \sqrt{x}$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $\sqrt{0{,}2} \approx 0{,}45$.
L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

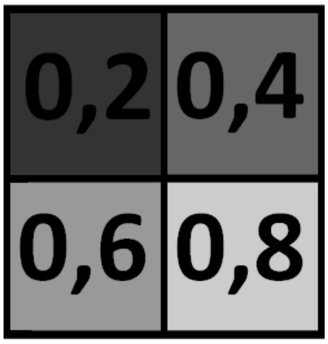


Image A

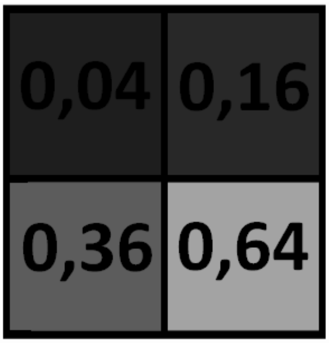
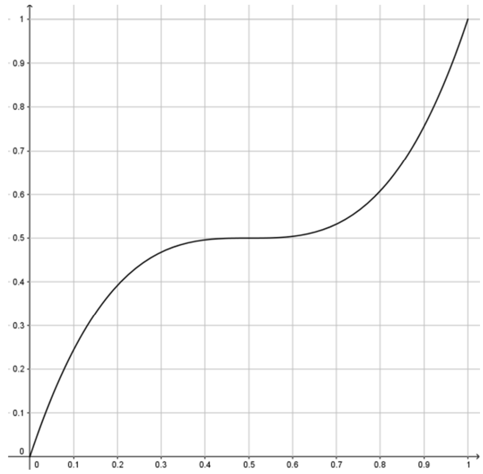


Image B

Image C

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$.
Sa courbe représentative est donnée ci-contre.



a. Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

b. À l'aide du graphique, quelles sont les nuances codées x appartenant à l'intervalle [0 ; 1] qui seront assombries par la fonction f_1 ?

2. *a.* Proposer une fonction de retouche f_2 définie sur [0 ; 1] éclaircissant toute nuance x appartenant à l'intervalle [0 ; 1].
b. Proposer une fonction de retouche f_3 définie sur [0 ; 1] assombrissant toute nuance x appartenant à l'intervalle [0 ; 1].

Partie B

1. On considère une fonction polynôme du second degré g_1 définie sur [0 ; 1] vérifiant $g_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$.
Sachant que g_1 est une fonction de retouche, justifier qu'elle est définie sur [0 ; 1] par :

$$g_1(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x.$$

2. On cherche maintenant une fonction de retouche g_2 définie sur [0 ; 1] qui, après l'application de la fonction de retouche g_1, permettrait de revenir aux nuances initiales.

a. Donner les valeurs de $g_2(0), g_2(1)$ et $g_2\left(\frac{2}{3}\right)$.

b. Résoudre dans l'intervalle [0 ; 1] l'équation $g_1(x) = \frac{1}{6}$, puis en déduire $g_2\left(\frac{1}{6}\right)$.

c. Résoudre l'équation de la variable x, $g_1(x) = y$, avec $x \in [0 ; 1]$ et $y \in [0 ; 1]$.
En déduire l'expression de la fonction de retouche g_2 qui, après l'application de la fonction de retouche g_1, permet de revenir aux nuances initiales.