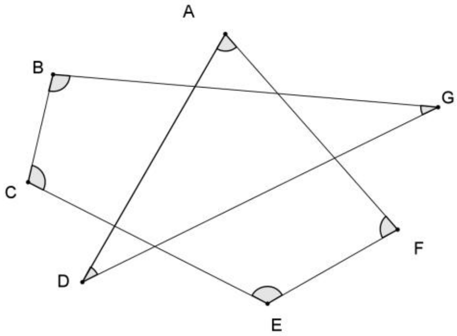
Olympiades de quatrième : exercices non retenus pour la session 2013

Exercice 1

Dans la figure ci-contre, la somme des angles marqués en A, B, C, D, E, F et G est un multiple de 90° (c'est-à-dire, en degrés, le produit de 90 par un entier).
Combien vaut-elle ?

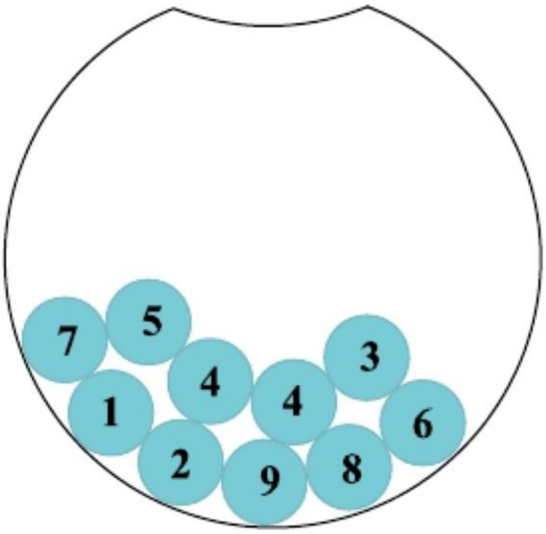


Exercice 2

Une urne contient des boules numérotées :

1 2 3 4 4 5 6 7 8 9

Le jeu est le suivant :
« On tire simultanément sans regarder deux boules de l'urne et on regarde les deux chiffres obtenus. Ensuite, on ordonne ces chiffres pour former le nombre le plus grand et le nombre le plus petit. Puis, on soustrait le plus petit nombre au plus grand.
Enfin, on recommence le procédé avec le résultat obtenu tant qu'on peut, c'est à dire jusqu'à obtenir une différence à un chiffre.
Le gain de ce jeu est la valeur de ce chiffre. »



Exemple : On tire le n° 8 et le n° 4.

84 - 48 = 36
63 - 36 = 27
72 - 27 = ...

1. On tire le n° 7 et le n° 3. Quel est le gain obtenu ?
2. Quelles boules faudrait-il tirer pour ne rien gagner à ce jeu?
3. Quels sont les gains possibles ?
4. Cette fois-ci, on tire 3 boules simultanément de l'urne et on recommence le même procédé : on soustrait le plus petit au plus grand nombre formé par ces trois chiffres. Expliquer ce qu'il se passe

Exercice 3 : Carrés magiques et couleurs de cartes

Les symboles ♥, ♦, ♣, ♠ représentent quatre nombres entiers différents compris entre 0 et 10.
Sont indiqués les produits des lignes et des colonnes.

♠	♠	♥	*180*
♥	♣	♣	*500*
♣	♣	♦	*200*
300	*600*	*100*	

Grille 1

♥	♥	♣	♠	*0*
♥	♠	♥	♦	*0*
♣	♦	♦	♦	*48*
♣	♠	♣	♠	*0*
900	*0*	*360*	*0*	

Grille 2

♠	♣	♠	♦	♠	*2058*
♥	♣	♦	♠	♦	*756*
♦	♠	♥	♥	♥	*1134*
♣	♣	♥	♣	♣	*3*
♦	♠	♦	♦	♦	*9072*
756	*49*	*2268*	*756*	*756*	

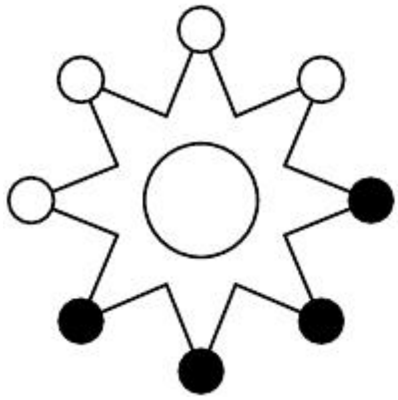
Grille 3

1) Pour la grille 1, démontrez que ♥ = *5* ♦ = *2* ♣ =10 ♠ =6

2) Trouver les valeurs de ♥, ♦, ♣, ♠ pour les deux autres grilles.

Exercice 4 : Les positions gagnantes du *Mu Torere*

<u>Règle du jeu maori du *Mu Torere* :</u>



Principe du jeu : immobiliser les pièces de l'adversaire.
Au début de la partie, chaque joueur place ses pièces sur quatre pointes adjacentes de l'étoile.
Les noirs commencent la partie et déplacent un de leurs pions suivant l'une des règles suivantes :

· D'une pointe vers le centre, si l'une des pointes adjacentes est occupée par l'adversaire et si le centre est vide.

· D'une pointe vers une pointe adjacente vide.

· Du centre vers une pointe vide.

Le gagnant est celui qui immobilise le premier tous les pions de l'adversaire.

<u>Consigne :</u>
Représenter schématiquement toutes les positions de fin de partie, gagnée par noir, aux symétries près.

Exercice 5 : Les nombres parfaits

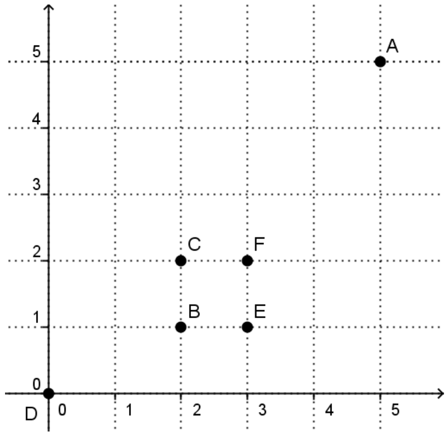
Les nombres parfaits sont connus depuis le III avant J.C.

Définition : Un nombre parfait est un entier la somme de ses diviseurs est égale à son double.

Par exemple, 6 est un nombre parfait car la somme des diviseurs de 6 est $1+2+3+6=12$ et le double de 6 est $2\times 6=12$.

1. Montrer que 28 est un nombre parfait.
2. Les diviseurs de 496 sont 1; 2; 4; 8; 16 ; 31; 62; 124; 248 et 496. Le nombre 496 est-il parfait ?
3. Le nombre 60 est-il un nombre parfait ?
4. Quelle est la somme des inverses des diviseurs de 496 ?
5. Un résultat célèbre affirme que tous les nombres parfaits pairs sont de la forme $2^{n-1}\times\left(2^{n}-1\right)$.
   a. Quelle est la valeur de n qui correspond au nombre parfait 6 ?
   b. Quelle est la valeur de n qui correspond au nombre parfait 8128 ?
6. Un autre résultat célèbre affirme que tous les nombres parfaits peuvent être écrits sous la forme d'une somme des cubes d'un certain nombre de nombres impairs, c'est-à-dire de la forme $1^3+3^3+5^3+7^3+....$
   a. Quelle est la décomposition de 28 en somme de cubes ?
   b. Quelle est la décomposition de 496 en somme de cubes ?

Exercice 6 : beaucoup de chemins



On se déplace par sauts sur les intersections d'un quadrillage carré de deux façons :
vers le haut (noté H) ou vers la droite (noté D).
Par exemple, pour aller de D à B(2;1) il y a
3 chemins possibles que l'on notera : DDH, DHD, HDD

1. a. Pour aller de D à E, combien de « sauts » faudra-t-il faire ?
   b. En utilisant la notation précédente, noter les différents trajets possibles pour aller de D à E. Combien de chemins différents y a-t-il ?

2. a. Pour aller de D à C, combien de « sauts » faudra-t-il faire ?
   b. Représenter sur le quadrillage de votre feuille, par plusieurs dessins, les différents trajets possibles pour aller de D à C (il est inutile de reproduire les axes; il suffit de placer D et C sur le quadrillage et de tracer à main levée mais soigneusement la ligne brisée reliant D et C).
   Combien de chemins différents y a-t-il ?

3. On souhaite déterminer le nombre de chemins pour arriver à F(3;2).
   a. Déterminer les coordonnées des points où on se situe juste avant d'arriver en F.
   b. Combien y-a-t-il de chemins pour aller de D à F ?

4. Le tableau suivant indique le nombre de chemins pour rejoindre le point de cordonnées (x ; y)

Compléter le tableau après avoir deviné la règle simple permettant de le remplir pour déterminer le nombre total de chemins pour aller de D à A(5;5)
Par exemple, B(2;1) et pour x=2 et y=1 on à bien 3 chemins pour aller de D à B.
Le 70 a été indiqué pour permettre de vérifier que la démarche est bonne.

5						
4					70	
3						
2	**1**					
1	**1**		**3**			
0	**1**	**1**	**1**			
y↑ x→	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*

Exercice 7 : Et à la fin, il n'en restera qu'un (ou presque).

On écrit une liste de nombres positifs rangée dans l'ordre croissant, à laquelle on applique le procédé suivant : on part toujours de la gauche et les deux premiers nombres a et b sont remplacés par $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, puis on continue de même. À chaque étape, l'effectif perd une unité. À la fin, on ne peut plus continuer, il ne reste plus qu'un nombre.

Par exemple, pour la liste 2, 5, 7, on fait : $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$, on obtient la liste $\frac{7}{10}$, 7

$\frac{10}{7}+\frac{1}{7}=\frac{11}{7}$ et le résultat final est $\frac{11}{7}$.

1) Quel nombre obtient-on à la fin, si on considère la liste : 1, 10, 11, 30, 31 ?

2) On considère la liste des nombres entiers consécutifs : 1, 2, 3, 4, . . . , 97, 98, 99.

a) Quelle liste obtient-on après la première étape ? Après la deuxième ?

b) Quel nombre obtient-on après les 98 étapes ?

3) m est un nombre entier plus grand que 4. On écrit la liste des nombres entiers consécutifs : 1, 2, 3, 4, . . . , *m*.

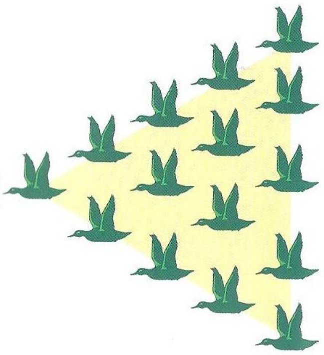
a) Quel nombre obtient-on à la fin, si *m* est un nombre impair ?

b) Quel nombre obtient-on à la fin, si m est un nombre pair ?

c) Quels sont les nombres entiers m pour lesquels le résultat final est plus grand que 1 et plus petit que 1,01 ?

Exercice 8 : Un vol de canards

Les canards volent en se regroupant pour voler vers le sud en formant un triangle équilatéral comme ci-dessous.



20 canards sont lâchés, peuvent-ils s'organiser en un triangle sans en laisser à l'écart? Pourquoi? Combien faut-il lâcher de canards supplémentaires pour permettre cette organisation de vol?

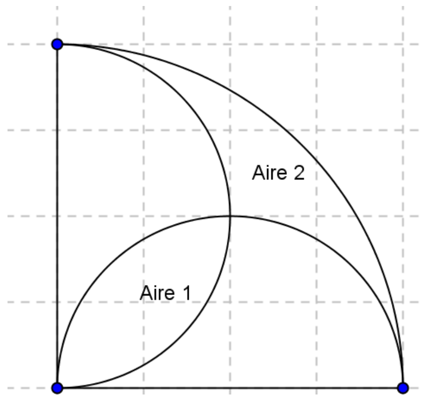
200 canards sont lâchés et un certain nombre d'entre eux se sont regroupés pour voler en triangle équilatéral comme ci-dessus.

Mais soudain, entendant un coup de fusil, 7 d'entre eux quittent le groupe et après un court moment d'hésitation, ceux qui restent se regroupent en deux triangles équilatéraux et reprennent leur vol vers le sud.

a) Combien peut-il y avoir de canard dans le vol triangulaire initial?

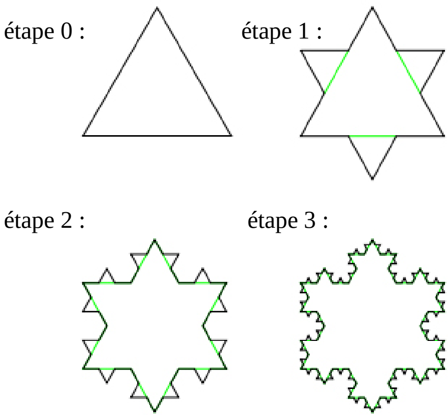
b) Préciser le nombre de canards dans la nouvelle organisation en deux vols pour chaque cas.

Exercice 9:



Deux peintres Yoann et Benoit doivent peindre une fresque. Yoann doit peindre la surface Aire1. Benoit peint la surface Aire 2. Quel est celui qui a la plus grande surface à peindre ?

Exercice 10: le flocon de Koch



On part d'un triangle équilatéral (étape 0).

On partage chaque côté du triangle en 3 segments de même longueur ; à partir des points obtenus on construit sur chaque côté, à l'extérieur, un nouveau triangle équilatéral. On réitère le procédé.

1) Effectue la construction de l'étape 2 lorsque la mesure du côté du triangle de départ (étape 0) est 12 cm.

2) Quel est le nombre de côtés du polygone obtenu aux étapes 3 ; 4 ; 5 et 10 ?

3) Dans le cas où, à l'étape 0, la mesure du côté du triangle équilatéral est 12 cm, quel est le périmètre de la figure obtenue à l'étape 1 ? A l'étape 2 ?

4) A l'étape 3 le périmètre de la figure sera-t-il doublé ?

5) Que peut-on dire de cette figure, en terme de périmètre et d'aire au fil des étapes ?

Exercice 11: marchand de pommes

Deux marchandes de pommes ont 30 pommes à vendre. La première les donne à 2 pour 1€, la deuxième à 3 pour 1€. A la fin de la journée, elles ont encaissé respectivement 15€ et 10€, **soit 25€ en tout**.

Le lendemain, les marchandes décident de s'associer et de vendre leurs 60 pommes à raison de 5 pour 2€ (« 2 pour 1€ plus 3 pour 1€ »). En comptant leur gain à la fin de la journée, elles constatent avec stupeur qu'**elles n'ont que 24€**.

Elles cherchent partout l'euro manquant et s'accusent mutuellement de l'avoir volé.

Que s'est-il passé ?