OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Classes de premières
(séries autres que S)

Concours 2014

♦ ♦ ♦

Mercredi 19 Mars 2014

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

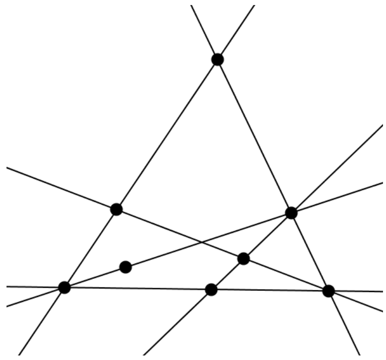
♦ ♦ ♦

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus et les idées qui leur sont venues.

Exercice numéro 1 : Figures équilibrées

La figure ci-contre est constituée d’un ensemble de droites (ici, 6 droites) et de points marqués (ici, 8 points).
Elle possède la propriété suivante :
Sur chacune de ces droites, il y a exactement trois points marqués.

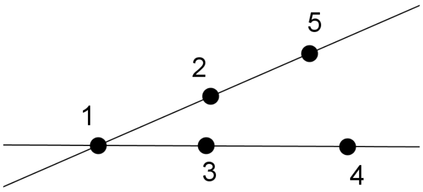
Une figure vérifiant cette propriété est dite ***équilibrée***.



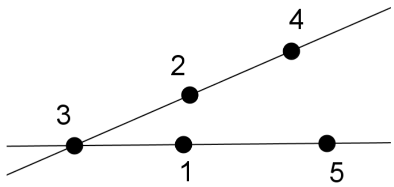
1. Construire une figure équilibrée constituée :
  a. de 7 points marqués et 5 droites ;
  b. de 9 points marqués et 8 droites.

Dans la suite, on considère une figure équilibrée comportant p points marqués qu’on a numérotés par les entiers de 1 à p.
Cette numérotation est alors dite ***magique*** s’il existe un entier K, tel que la somme des trois entiers (correspondant à la numérotation des points marqués) de chaque droite de la figure est égale à K.
Cet entier K est appelé ***constante magique*** de la numérotation.

2. Voici par exemple une figure équilibrée (avec 2 droites et 5 points marqués) ayant plusieurs numérotations magiques :



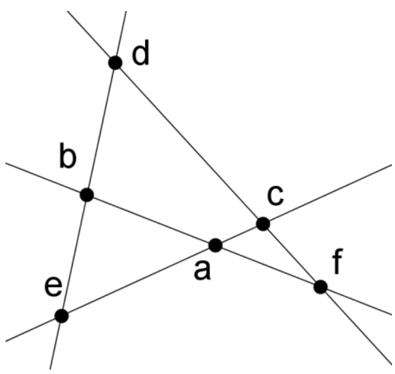
$K = 8$



$K = 9$

Trouver une numérotation de cette figure qui ne soit pas magique.
Trouver une numérotation magique de cette figure dont la constante magique n’est ni 8 ni 9.

3. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 4 droites.
Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés a, b, c, d, e, f sur la figure.



  a. Démontrer que si la figure est magique, de constante magique K, alors $4 \times K = 42$.

  b. Peut-on trouver une numérotation magique de cette figure ?

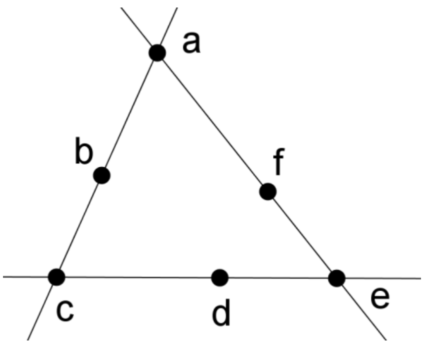
Si oui, la donner ; si non, expliquer pourquoi.

4. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 3 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés à nouveau *a*, *b*, *c*, *d*, *e, f* sur la figure.

a. Démontrer que $a + c + e$ est compris entre 6 et 15.

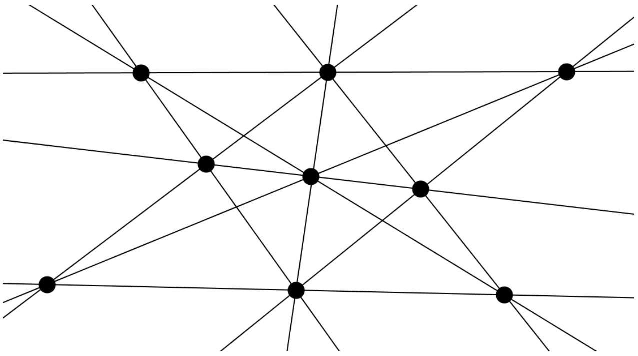
b. Démontrer que si la numérotation de cette figure est magique, de constante K, alors $a + c + e = 3(K - 7)$.

c. Déterminer la(les) constante(s) magique(s) pour cette figure.



5. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 9 points et 10 droites.

Cette figure admet-elle une numérotation magique ?



Exercice numéro 2 : le plus court possible

Quatre villes – Alençon, Bélançon, Célançon et Délançon – sont situées aux quatre sommets d'un carré dont le côté mesure 100 km.
La Direction Départementale de l'Équipement souhaite les relier les unes aux autres par le réseau routier le plus court possible.

Partie A

« On pourrait construire des routes allant d'Alençon à Bélançon, puis Célançon, puis Délançon » dit l'assistant n°1.

« Ou alors, on pourrait construire deux routes diagonales : une d'Alençon à Célançon et l'autre de Délançon à Bélançon » propose l'assistant n°2.

« Et pourquoi pas, construire une route semi-circulaire complétée par deux segments ? » propose l'assistant n°3.

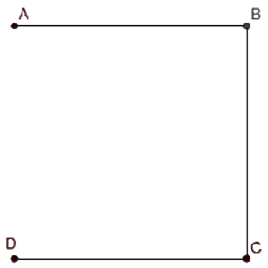


fig. 1
Assistant n°1

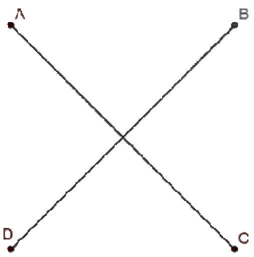


fig. 2
Assistant n°2

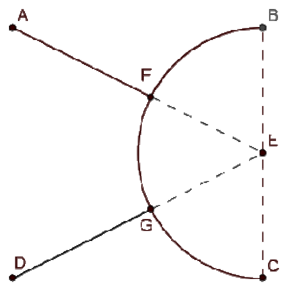


fig. 3
Assistant n°3

1. Quel assistant propose le réseau routier le plus court ?

2. Un mathématicien qui était présent propose une autre solution :

« On pourrait relier Alençon et Délançon par un triangle isocèle (triangle AED de la fig. 4), puis Bélançon et Célançon par un triangle isocèle de même forme (triangle BFC) et relier les deux sommets E et F comme le suggère la figure ci-contre » :

Si EF = 20 km, le réseau routier envisagé sur la figure 4 est-il plus court que ceux proposés par les assistants ?

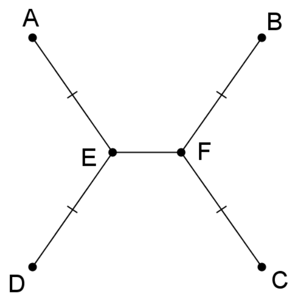


fig. 4

Partie B

Dans cette partie, on souhaite prouver que le réseau routier le plus court est effectivement du modèle proposé par le mathématicien. On cherchera par la suite la longueur EF qui réalise ce plus court chemin.

Rappels de géométrie :

Si A, B, C sont trois points du plan, en notant AB la distance entre A et B :

on a toujours $AB + BC \geq AC$ *;*

on a l'égalité $AB + BC = AC$ *si, et seulement si, B appartient au segment [AC].*

On admettra aussi que si on trace une courbe quelconque entre A et B, la longueur de la courbe est toujours supérieure ou égale à la longueur du segment [AB] (le plus court chemin étant la ligne droite).

1. Revenons à notre réseau routier.

On admettra qu'on peut, sans restreindre la généralité, supposer que le réseau solution est formé de deux courbes joignant les sommets opposés (A et C d'une part, B et D d'autre part), et que ces courbes sont à l'intérieur du carré de 100 km de côté, comme dans le dessin suivant.

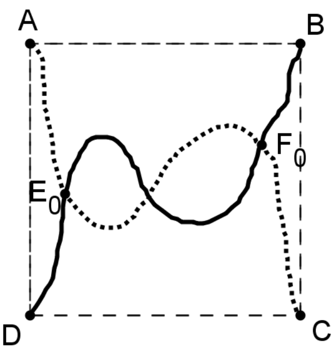


fig. 5

On considère un réseau formé de deux courbes comme sur la figure 5.

En parcourant la route entre Alençon et Célançon en partant d'Alençon, on appelle E_0 le premier point d'intersection rencontré et F_0 le dernier point d'intersection rencontré (ces deux points pouvant être confondus). (*fig. 5*).

Montrer qu'alors la longueur du réseau de la fig. 5 est supérieure ou égale à celle du réseau suivant, constitué de segments (*fig. 6*).

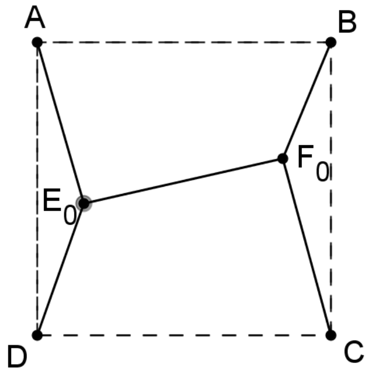


fig. 6

2. On considère les droites Δ_E et Δ_F, parallèles à (AD) passant par E_0 et F_0 (voir figure 7 ci-dessous).

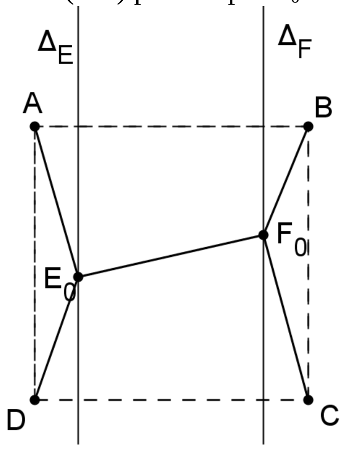


fig. 7

a. Déterminer le point E de Δ_E tel que la somme des distances DE + EA soit minimale.

On appelle F le point trouvé en faisant le même raisonnement pour F_0.

b. Montrer que $EF \leq E_0F_0$.

c. Déduire de ce qui précède que le réseau recherché est nécessairement de la forme suivante où E et F sont sur la médiatrice du segment [AD] (*fig. 8*).

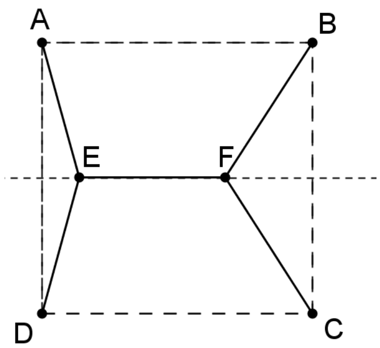


fig. 8

3. On admettra que dans le réseau recherché, les points E et F doivent être de part et d'autre de la médiatrice de [AB].

a. Justifier que le réseau recherché doit être symétrique par rapport à la médiatrice de [AB].

b. D'après ce qui précède, le réseau recherché a donc la même forme que celui que proposait le mathématicien (*fig. 4*).

Pouvez-vous l'aider à déterminer la longueur EF pour laquelle ce type de réseau routier sera le plus court possible ?

c. Quelle est alors la valeur de l'angle $\widehat{DEA}$?

Exercice numéro 3 : la machine à calculer

On dispose d'un ordinateur dépourvu de toute fonctionnalité, à l'exception du programme suivant, traduit en langage naturel :

Début
Choisir a
Choisir b
$r \leftarrow 1 - \frac{a}{b}$
Afficher le résultat r
Fin

1. a. Qu'affiche l'ordinateur lorsque l'on choisit $a = 1$ et $b = 4$?
   b. Pour quels couples de nombres réels (a ; b) choisis en entrée l'ordinateur affiche-t-il un message d'erreur ?

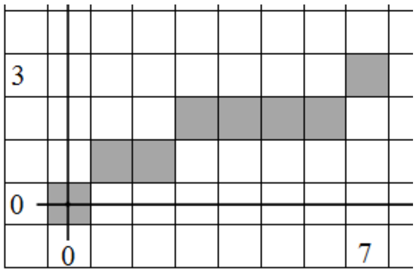
2. a. On choisit $a = 1$ en entrée.
   Existe-t-il des valeurs de b à saisir en entrée pour lesquelles l'affichage final est b ? Si oui, lesquelles ?
   b. Même question avec $a = -2$ en entrée.
   c. Discuter, selon les valeurs de a, l'existence de valeurs de b à choisir en entrée pour lesquelles l'affichage final est b.
   Lorsqu'elles existent, donner leur expression en fonction de a.

Dans la suite, on notera a o b (**qui se lit a « rond » b**) le résultat affiché par l'algorithme lorsque l'on choisit des nombres réels a et b en entrée ne produisant pas un message d'erreur.

Par exemple : $1 \circ 2 = 1 - \frac{1}{2} = 0{,}5$.

3. À quelle condition sur a et b a-t-on $a \circ b = 0$?
4. Existe-t-il des nombres réels a et b distincts tels que $a \circ b = b \circ a$?
5. Expliquer comment on peut obtenir le résultat de $(1 \circ 2) \circ 3$ à l'aide de cet ordinateur.
6. a. Vérifier que, pour tout réel b non nul : $\boldsymbol{(a \circ b) \circ 1 = \frac{a}{b}}$.
   b. En déduire une expression n'utilisant que $\circ$ permettant d'obtenir l'inverse d'un réel b non nul.
   c. Sans effectuer de calculs, utiliser ce qui précède pour déterminer l'opération obtenue par l'expression : $(a \circ [(1 \circ b) \circ 1]) \circ 1$.
7. a. Vérifier que, pour tout réel a différent de b et b non nul, on a : $\boldsymbol{1 \circ (a \circ b) = \frac{a}{a-b}}$.
   b. En déduire une expression ne comportant que l'opération $\circ$ permettant d'obtenir $a - b$.

Exercice numéro 4 : pixel et téléphone



Sur l'écran d'un téléphone portable, un point est représenté par un pixel, c'est-à-dire un petit carré. Ce pixel peut être allumé ou éteint.
Pour représenter une courbe, on allume une suite continue de pixels.
Deux pixels doivent être reliés par un côté ou par un sommet, comme le montre le schéma ci-contre.

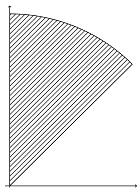
Un pixel est représenté par une case du quadrillage et est repéré par son centre.

On souhaiterait faire apparaitre un cercle sur l'écran d'un téléphone portable.

On se limitera cependant, dans cet exercice, au tracé d'un arc de cercle dans un secteur particulier de l'écran (« Nord-Nord-Est »). *Le reste de ce cercle pourra être obtenu par des symétries ou des adaptations de l'algorithme.*

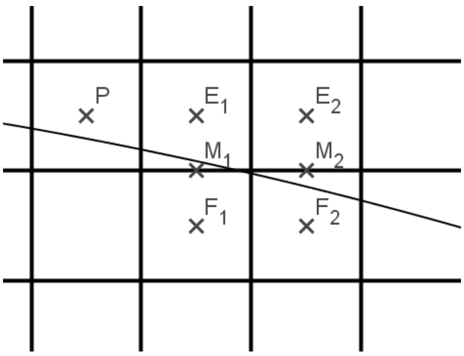
Voici le procédé utilisé pour choisir les pixels à allumer afin de construire l'arc de cercle envisagé :

On considère un pixel allumé. Soit E le centre du pixel situé immédiatement à sa droite et F le centre du pixel situé au-dessous du pixel de centre E. On note M le milieu du segment [EF].

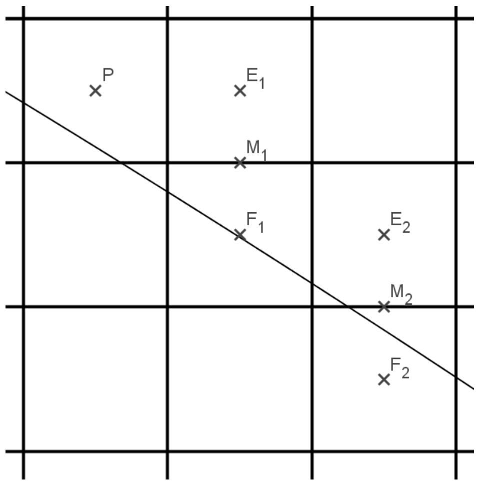


On considère le secteur circulaire engendré par cet arc de cercle (*en grisé, ci-contre*).
Si M appartient à ce secteur circulaire, on allume le pixel de centre E.
Sinon, on allume celui de centre F.

1. Sur les graphiques ci-dessous, P est le centre d'un pixel allumé.
   Quels sont les centres des deux pixels allumés après P ?

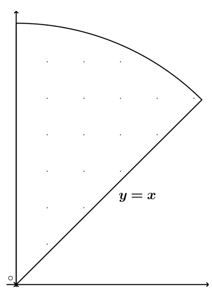


Graphique 1



Graphique 2

2. On considère un repère orthonormé dont l'origine O est le centre d'un pixel.
   L'unité choisie est la longueur du côté d'un carré représentant un pixel.
   On s'intéresse à l'arc de cercle de centre O et de rayon r représenté ci-contre.



   a. Soit P le centre d'un pixel allumé.
      On note $(x_P ; y_P)$ ses coordonnées dans le repère orthonormé (*on supposera* $y_P \geq x_P$).
      Soient E_1, F_1 et M_1 les points définis selon le procédé précédemment décrit.
      Exprimer les coordonnées de ces trois points en fonction de celles de P.

   b. Si $(x_P + 1)^2 + (y_P - \frac{1}{2})^2 \leq r^2$, quel pixel va-t-il s'allumer : celui de centre E_1 ou celui de centre F_1 ?

      Justifier la réponse

3. On considère l’arc de cercle de centre O et de rayon $r = 20$ représenté ci-dessous.
Sur ce graphique apparait également la droite d’équation $y = x$ délimitant cet arc de cercle.
Le point de coordonnées (0 ; 20) est le centre d’un pixel allumé.
Recopier et compléter l’algorithme suivant de telle sorte qu’il permette de représenter sur l’écran du téléphone portable cet arc de cercle.

```
Variables
    x, y : réels
Début
    x prend la valeur 0
    y prend la valeur 20
    Tant que y ≥ x faire
        Si …………………. alors
            Début Si
                x prend la valeur ……
                y prend la valeur ……
            Fin Si
            Sinon
                Début Sinon
                    x prend la valeur ……
                    y prend la valeur ……
                Fin Sinon
        Allumer le pixel de centre de coordonnées (x ; y)
    Fin Tant que
Fin
```